

§2. Векторный метод решения задач стереометрии без использования прямоугольных координат

Напомним следующую теорему о векторах одной плоскости (теорема о разложении):

Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, тогда для любого вектора \vec{c} , лежащего в одной плоскости с векторами \vec{a} и \vec{b} , существует единственная пара чисел x и y таких, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

□ Приведем векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} к одному началу – точке O , через конец вектора c проведем прямые, параллельные векторам \vec{a} и \vec{b} (рис. 10), тогда $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, т. е. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Если предположить, что возможно другое разложение $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, то должно выполняться равенство $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = \vec{0}$. Если $x - x_1 \neq 0$, то

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}.$$

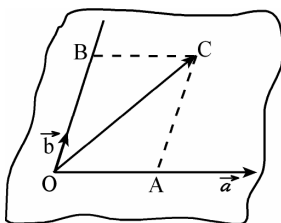


Рис. 10

Это означает коллинеарность векторов \vec{a} и \vec{b} , что неверно, значит, $x - x_1 = 0$. По той же причине $y - y_1 = 0$. ■

Эта теорема верна и в том случае, когда векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} параллельны одной плоскости (также приводим их к общему началу).

Из теоремы о разложении следует: пусть точки A , B и C не лежат на одной прямой, тогда для того, чтобы точка D лежала в плоскости ABC , необходимо и достаточно, чтобы существовала пара чисел x и y такая, что $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 11).

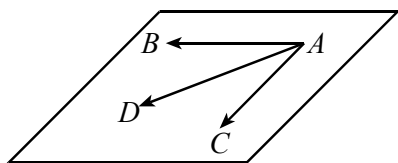


Рис. 11

Для применения векторного метода в пространстве нужны следующие две теоремы:

Теорема 1. Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} отложены от одной точки и не лежат в одной плоскости, то равенство

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \text{ верно только при } x = y = z = 0.$$

□ Например, если $z \neq 0$, то $\vec{c} = -\frac{x}{z}\vec{a} - \frac{y}{z}\vec{b}$, что означает, что вектор \vec{c} лежит в одной плоскости с векторами \vec{a} и \vec{b} . Поэтому $z = 0$. По той же причине $x = 0$ и $y = 0$.

Теорема 2 (о разложении). Пусть три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} не лежат в одной плоскости.

Тогда для любого вектора \vec{d} существует единственная тройка чисел x , y , z таких, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

□ Отложим все четыре вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} от общей точки M (рис. 12). Векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ не лежат в одной плоскости, поэтому плоскости MAB , MAC , MBC различ-

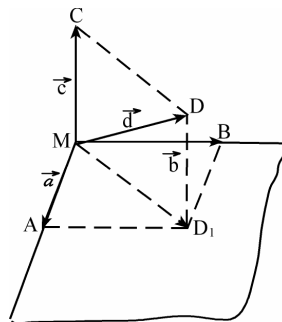


Рис. 12

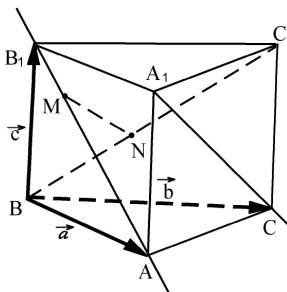
ны. Если точка D попала на одну из них, например, на плоскость MAB , то $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. $d = x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c}$. Если же точка D не принадлежит ни одной из этих плоскостей, то проведем через точку D прямую, параллельную вектору \vec{MC} . Пусть D_1 – точка ее пересечения с плоскостью MAB . По правилу сложения векторов $\vec{MD} = \vec{MD}_1 + \vec{D_1D}$, по теореме о разложении на плоскости $\vec{MD}_1 = x\vec{a} + y\vec{b}$; из коллинеарности векторов $\vec{D_1D}$ и \vec{c} следует $\vec{D_1D} = z\vec{c}$, поэтому

$$\vec{d} = \vec{MD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Предположение, что есть другое разложение $\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, приведет к равенству

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0.$$

По предыдущей теореме это равенство возможно только лишь при $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Разложение единственно. ■



Задача 7. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма с основанием ABC . Доказать, что на прямых AB_1 и BC_1 есть такие точки M и N , что прямая MN параллельна прямой A_1C . Найти отношение $MN : A_1C$.

△ Пусть M – точка на AB_1 , N – точка на BC_1 (рис. 13). Прямые MN и A_1C параллельны тогда и только тогда, когда векторы \vec{MN} и $\vec{A_1C}$

коллинеарны, т. е. $\vec{MN} = \lambda\vec{A_1C}$. Разложим эти векторы по векторам $\vec{a} = \vec{BA}$, $\vec{b} = \vec{BC}$ и $\vec{c} = \vec{BB_1}$, не лежащим в одной плоскости. Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{AB_1} &= \vec{c} - \vec{a}, \quad \vec{AM} \parallel \vec{AB_1} \Rightarrow \vec{AM} = x(\vec{c} - \vec{a}); \\ \vec{BC_1} &= \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{BN} \parallel \vec{BC_1} \Rightarrow \vec{BN} = y(\vec{b} + \vec{c}); \\ \vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN} = -\vec{AM} - \vec{BA} + \vec{BN} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{MN} &= -x(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{a} + y(\vec{b} + \vec{c}) = (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c}; \\ \vec{A_1C} &= \vec{A_1A} + \vec{AC} = -\vec{c} + (\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}. \end{aligned}$$

Предположим, что точки M и N таковы, что $MN \parallel A_1C$, т. е. $\vec{MN} = \lambda\vec{A_1C}$, тогда имеет место равенство

$$(x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} - \lambda\vec{c}.$$

В силу единственности разложения вектора по трем векторам, не лежащим в одной плоскости, следует равенство коэффициентов разложения

$$x-1 = -\lambda, \quad y = \lambda, \quad y-x = -\lambda.$$

Эта система имеет единственное решение $\lambda = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, значит прямая MN будет параллельна прямой A_1C только в том случае, когда

$AM = \frac{2}{3}AB_1$ и $BN = \frac{1}{3}BC_1$. Из $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$ следует $|\overrightarrow{MN}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|$, т. е. $MN = \frac{1}{3}A_1C$, откуда $MN : A_1C = 1 : 3$. ▲

Задача 8. В условиях предыдущей задачи найти длину отрезка MN , если в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , $AB = BC = 2$, $\angle B = 90^\circ$, а ребро $BB_1 = 1$ и образует равные углы по 60° с ребрами AB и BC .

△ Данные задачи определяют длины векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и углы между ними, это позволяет вычислить скалярные произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ и $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Имеем:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = 1,$$

$$1) \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$$

2) углы между векторами \vec{a} и \vec{c} и векторами \vec{b} и \vec{c} равны 60° , поэтому

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = 1 \quad \text{и} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = 1.$$

Из решения задачи 7 известно разложение вектора \overrightarrow{MN} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :

$$\overrightarrow{MN} = -\lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} - \lambda \vec{c} = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c}.$$

Так как

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}|^2 &= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{9} (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{9} (\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= \frac{1}{9} (4 + 4 + 1 - 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 1, \end{aligned}$$

то

$$MN = \sqrt{|\overrightarrow{MN}|^2} = 1. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Если в условиях задач 7 – 8 требовалось бы найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 , то, расположив точки K и P на AB_1 и BC_1 , надо разложить вектор \overrightarrow{KP} по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , а затем использовать условия $KP \perp AB_1$ и $KP \perp BC_1$, которые равносильны условиям $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$ и $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$.

Задача 9. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC$ и $AD = DC$. Доказать, что ребра AC и BD перпендикулярны.

△ Выберем тройку векторов, не лежащих в одной плоскости:

$$\vec{a} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BD}.$$

Разложим векторы AD , CD и AC по этим векторам:

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{b};$$

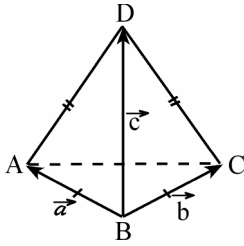


Рис. 14

$$\vec{AC} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Известно, что $AB = BC$, т.е. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, и $AD = DC$, т.

е. $|\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}|$. Требуется доказать, что

$AC \perp BD$, т. е. $\vec{AC} \perp \vec{BD}$. Это означает, что надо установить, что $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$.

Из $|\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}|$ следует $(c - a)^2 = (c - b)^2$,

$$\vec{c}^2 - 2\vec{ac} + \vec{a}^2 = \vec{c}^2 - 2\vec{bc} + \vec{b}^2.$$

Учитывая, что $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ получаем $\vec{ac} = \vec{bc}$, т. е. $\vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Поскольку $\vec{c} = \vec{BD}$ и $\vec{a} - \vec{b} = \vec{AC}$, то $\vec{BD} \cdot \vec{AC} = 0$, т.е. $BD \perp AC$. ▲

Следствие. В правильной треугольной пирамиде, в частности, у правильного тетраэдра, противоположные ребра перпендикулярны.

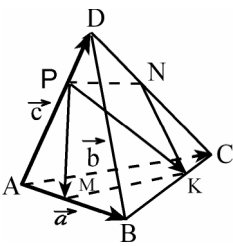


Рис. 15

Задача 10. Точки M и N – середины ребер тетраэдра $ABCD$ (рис. 15), точка P взята на ребре AD так, что $AP : AD = 2 : 3$. Найти, в каком отношении плоскость MNP делит ребро BC .

Пусть плоскость MNP пересекает ребро BC в точке K . Точка K лежит в плоскости MNP тогда и только тогда, когда существуют числа x и y такие, что

$$\vec{PK} = x\vec{PM} + y\vec{PN}. \quad (5)$$

Выберем тройку векторов $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$ и $\vec{c} = \vec{AD}$, разложим векторы \vec{PK} , \vec{PM} и \vec{PN} по этим векторам

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{c},$$

тогда

$$\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{AM} = -\vec{AP} + \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c},$$

$$\vec{PD} = \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{c}, \quad \vec{DN} = \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}),$$

поэтому

$$\vec{PN} = \vec{PD} + \vec{DN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}.$$

Далее

$$\vec{PK} = \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BK}, \quad \vec{PA} = -\vec{AP} = -\frac{2}{3}\vec{c},$$

а стоящий в этой сумме вектор \vec{BK} коллинеарен вектору \vec{BC} , т. е. $\vec{BK} = \lambda\vec{BC} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$.

Находим

$$\vec{PK} = -\frac{2}{3}\vec{c} + \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}.$$

Подставляя полученные выражения в (5), получим

$$\begin{aligned} \vec{PK} &= (1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} = x\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right) = \\ &= \frac{x}{2}\vec{a} + \frac{y}{2}\vec{b} - \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y\right)\vec{c}. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора коэффициенты разложения равны, т. е.

$$\begin{cases} 1 - \lambda = \frac{x}{2}, \\ \lambda = \frac{y}{2}, \\ \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$. Значит,

$\overrightarrow{BK} = \lambda \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$, точка K лежит на ребре BC и делит его в отношении

$BK : KC = 2 : 1$. ▲