

## § 2. Размещения и перестановки

Если из множества, содержащего  $n$  элементов, каким-то способом выбирают  $k$  элементов ( $k \leq n$ ), то говорят, что из этого множества *произведена* выборка объема  $k$  (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об упорядоченной выборке, а если нет – о неупорядоченной.

Например, слово из 4 букв в примере 2 — это упорядоченная выборка объема 4, а подмножества в примере 7 — неупорядоченные выборки из подмножества  $A$ . В то же время мы видели в примерах 5 и 6, что можно переходить от выборки одного вида к выборке другого вида.

**Определение.** Всякая упорядоченная выборка объема  $k$  из множества, состоящего из  $n$  элементов, называется *размещением из  $n$  элементов по  $k$  элементов* и обозначается через  $A_n^k$ .

Символ  $A_n^k$  читается: «а из  $n$  по  $k$ » или «число размещений из  $n$  по  $k$ ».  $A$  – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

**Определение.** Размещение из  $n$  элементов по  $n$  называется *перестановкой из  $n$  элементов* и обозначается через  $P_n$ .

Символ  $P_n$  происходит от французского слова Permutation – «перестановка».

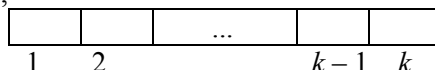
В примере 1 мы нашли, что  $P_8 = 8!$ , с перестановкой мы встречались также в примерах 4 и 5.

В примере 2 с помощью правила умножения было найдено размещение из 8 элементов по 4:  $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ . В общем случае справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1), \quad (1)$$

где  $1 \leq k \leq n$ .

Доказательство этой формулы получается применением правила произведения. На первое место в выборке можно поместить любой из  $n$  элементов, на второе – любой из  $(n-1)$  оставшихся и т.д. После выбора элементов на  $(k-1)$ -е место останется  $n - (k-1) = n - k + 1$  элементов,



любой из которых можно поместить на  $k$ -е место. По правилу произведения получаем

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

В частности,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (2)$$

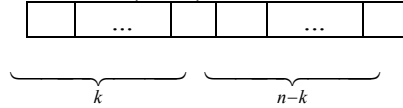
Формулы для  $A_n^k$  и  $P_n$  легко запоминаются, и их, конечно, надо знать. Но еще важнее знать правило произведения, на основе которого выводятся эти формулы, т.к. многообразие ситуаций в комбинаторике не исчерпываются стандартными комбинациями, и многие задачи можно решить только при условии знания принципов комбинаторики.

Обратим внимание на то, что формулу (1) при  $k < n$  можно записать следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (3)$$

Чтобы эта формула действовала и при  $k = n$ , примем по определению, что  $0! = 1$ .

Возникает вопрос: к формуле (1) мы пришли, применяя правило произведения, а можно ли получить комбинаторными рассуждениями формулу (3)? Ответ: да, можно. Из каждого размещения из  $n$  элементов по  $k$  можно получить перестановку из  $n$  элементов, если в произвольном порядке дописать остальные  $(n - k)$  элементов:



Разные перемещения при любых «добавлениях» будут порождать разные перестановки, а каждое добавление может быть сделано  $(n - k)!$  различными способами. Поэтому по правилу произведения

$$P_n = A_n^k P_{n-k},$$

а это и есть формула (3).

**Пример 9.** Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбрать из множества  $\{1, 2, \dots, 9\}$  и число

вариантов равно  $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 15120$ . Если число оканчивается цифрой 5, то

в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 – нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным.

Цифры со второй по четвертую можно выбрать  $A_8^4 = 1680$  различными

способами. Следовательно, по правилу произведения имеется  $8 \cdot A_8^4$

чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.

$$A_9^5 + 8 \cdot A_8^4 = 28560.$$

**Ответ:** 28560.

**Пример 10.** Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Чтобы решить задачу, проведем мысленный эксперимент: представим себе, что тома 1 и 2 связаны бечевкой. Расстановка полученного набора из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена  $9!$  способами.

**Ответ:**  $9!$