§ 2. Размещения и перестановки

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов ($k \le n$), то говорят, что из этого множества *произведена* выборка объема k (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об упорядоченной выборке, а если нет – о неупорядоченной.

Например, слово из 4 букв в примере 2 — это упорядоченная выборка объема 4, а подмножества в примере 7 — неупорядоченные выборки из подмножества A. В то же время мы видели в примерах 5 и 6, что можно переходить от выборки одного вида к выборке другого вида.

Определение. Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* и обозначается через A_n^k.

Символ A_n^k читается: «а из n по k» или «число размещений из n по k». A – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

Определение. Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n.

Символ P_n происходит от французского слова Permutation – «перестановка».

В примере 1 мы нашли, что $P_8 = 8!$, с перестановкой мы встречались также в примерах 4 и 5.

В примере 2 с помощью правила умножения было найдено размещение из 8 элементов по 4: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. В общем случае справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1), \qquad (1)$$

где $1 \le k \le n$.

Доказательство этой формулы получается применением правила произведения. На первое место в выборке можно поместить любой из n элементов, на второе – любой из (n – 1) оставшихся и т.д. После выбора элементов на (k – 1)-е место останется n – (k – 1) = n – k +1 элементов,

		...		
1	2		$k-1$	k

любой из которых можно поместить на k-е место. По правилу произведения получаем

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1).$$

В частности,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...\cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (2)$$

Формулы для A_n^k и P_n легко запоминаются, и их, конечно, надо знать. Но еще важнее знать правило произведения, на основе которого выводятся эти формулы, т.к. многообразие ситуаций в комбинаторике не исчерпываются стандартными комбинациями, и многие задачи можно решить только при условии знания принципов комбинаторики.

Обратим внимание на то, что формулу (1) при $k<n$ можно записать следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Чтобы эта формула действовала и при $k = n$, примем по определению, что $0!=1$.

Возникает вопрос: к формуле (1) мы пришли, применяя правило произведения, а можно ли получить комбинаторными рассуждениями формулу (3)? Ответ: да, можно. Из каждого размещения из n элементов по k можно получить перестановку из n элементов, если в произвольном порядке дописать остальные $(n - k)$ элементов:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{\ \dots\ }\boxed{}}_{k}\underbrace{\boxed{}\boxed{\ \dots\ }\boxed{}}_{n-k}$$

Разные перемещения при любых «добавлениях» будут порождать разные перестановки, а каждое добавление может быть сделано $(n - k)!$ Различными способами. Поэтому по правилу произведения

$$P_n = A_n^k P_{n-k},$$

а это и есть формула (3).

Пример 9. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбирать из множества $\{1, 2, ..., 9\}$ и число вариантов равно $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 15120$. Если число оканчивается цифрой 5, то в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 – нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным. Цифры со второй по четвертую можно выбрать $A_8^4 = 1680$ различными способами. Следовательно, по правилу произведения имеется $8 \cdot A_8^4$ чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.

$$A_9^5 + 8 \cdot A_8^4 = 28560.$$

Ответ: 28560.

Пример 10. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Чтобы решить задачу, проведем мысленный эксперимент: представим себе, что тома 1 и 2 связаны бечевкой. Расстановка полученного набора из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена 9! способами.

Ответ: 9!

