Комбинаторикой (от латинского combinare – соединять, сочетать) называют раздел математики, в котором изучаются задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества. Некоторые часто встречающиеся комбинации получили названия, которые, видимо, уже встречались читателю: перестановки, размещения, сочетания.

В этом задании рассматриваются как перечисленные «стандартные» комбинации, так и общие принципы решения комбинаторных задач.

§ 1. Примеры комбинаторных задач и общие принципы комбинаторики.

Пример 1, навеянный сказкой Андерсена «Снежная королева». Помните, когда Герда нашла Кая в чертогах Снежной королевы, тот безуспешно складывал из льдинок слово «вечность» (за решение задачи Каю были обещаны свобода, весь свет и новые коньки). Упростим задачу и представим, что у нас есть набор из восьми карточек с буквами «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь». Вопрос: сколько восьмибуквенных «слов» можно составить из этих карточек? (Здесь и далее под словом понимается некоторая последовательность букв.)

Составление слова из восьми букв можно представить как заполнение буквами клеток следующей таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8

На первое место можно поставить любую из восьми букв, на второе – любую из семи оставшихся и т.д. вплоть до заполнения единственным способом клетки № 8 последней оставшейся буквой. Число способов заполнения таблицы будет равно

$$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=8!$$

Напомним, что символом $n!$ (читается «эн факториал») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Ответ: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Наверное, читателя смутила та поспешность, с которой мы завершили решение примера 1, перемножив числа способов заполнения клеток таблицы. Чтобы прояснить этот момент, разберем более общую задачу.

Пусть множество $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ состоит из m элементов, а множество $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ – из n элементов. Рассмотрим множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a,b), где элемент a принадлежит множеству A, а элемент b принадлежит множеству B (такое множество называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A\times B$). Иными словами, рассматривается множество, элементами которого являются «карточки» вида

$$\boxed{a}\boxed{b}$$

Слово «упорядоченные» в определении $A\times B$ особенно важно, когда в A и B есть одинаковые элементы. Например, если $A=B=\{а,б,\ldots,я\}$ – русский алфавит, то элементы $A\times B$ можно считать словами, а $\boxed{a}\boxed{x}$ и $\boxed{x}\boxed{a}$ - разные слова!

Правило произведения: множество $A\times B$ содержит mn элементов.

Доказательство этого утверждения почти очевидно, т.к. все элементы-карточки можно расположить в виде прямоугольной таблицы, в которой m строк и n столбцов.

$$\begin{array}{cccc}
\boxed{a_1}\boxed{b_1} & \boxed{a_1}\boxed{b_2} & \cdots & \boxed{a_1}\boxed{b_n} \\
\boxed{a_2}\boxed{b_1} & \boxed{a_2}\boxed{b_2} & \cdots & \boxed{a_2}\boxed{b_n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
\boxed{a_m}\boxed{b_1} & \boxed{a_m}\boxed{b_2} & \cdots & \boxed{a_m}\boxed{b_n}
\end{array}$$

Аналогично можно доказать, что множество $A \times B \times C$, состоящее из упорядоченных троек, содержит mnp элементов (p – число элементов в множестве C). Действительно, карточек вида $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c_1}$ столько, сколько элементов в $A \times B$, т.е. mn, столько же карточек вида $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c_2}$ и т.д. В этом случае $A \times B \times C$ можно представить в виде прямоугольного параллелепипеда.

Вообще, множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$ состоит из $n_1 n_2 \ldots n_p$ элементов, где n_1 – число элементов в A_1, n_2 – в A_2 и т.д. Доказывается это утверждение индукцией по p аналогично рассмотренному выше переходу от $p = 2$ к $p = 3$.

Для решения задач комбинаторики удобна следующая формулировка правила произведения.

Пусть объект a_1 можно выбрать n_1 различными способами, после каждого выбора объекта a_1 объект a_2 можно выбрать n_2 различными способами, ..., после каждого выбора объектов a_1, a_2, ..., a_{p-1} объект a_p можно выбрать n_p различными способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать a_1, a_2, ..., a_p равно $n_1 n_2 \ldots n_p$.

Действительно, если A_k – множество состояний, из которых выбирается объект a_k, то n_k – число элементов множества A_k (k =1,2,..., p), и мы получаем известную нам формулировку правила умножения.

Вернемся к примеру 1. Пусть a_1 – первая буква слова, тогда ее можно выбрать 8 способами, т.е. $n_1 = 8$; вторую букву a_2 можно выбрать 7 способами, т.е. $n_2 = 7$ и т.д. По правилу умножения число всех комбинаций равно

$$8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Замечание. Мы видим, что правило произведения само по себе очень простое. При решении комбинаторных задач с помощью этого правила основная трудность заключается в выборе множества A_k (первая формулировка правила) или объектов a_k (вторая формулировка правила), т.е. в формализации задачи.

Разберем несколько примеров на применение правила произведения.

Пример 2. Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?

Пусть a_k – k-я буква слова (k =1,2,3,4). Тогда $n_1 = 8$, $n_2 = 7$, $n_3 = 6$, $n_4 = 5$ и по правилу произведения сразу получаем ответ: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Ответ: 1680.

Пример 3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладью так, чтобы они не били друг друга?

Выбор объекта a_1 – поля для белой ладьи – может быть сделан $n_1 = 64$ способами. Независимо от выбора этого поля белая ладья бьет 15 полей, поэтому для черной ладьи остается 64-15 =49 полей: $n_2 = 49$.

Ответ: число расстановок ладей равно $64 \cdot 49 = 3136$.

В разобранной задаче вопрос о том, считаем ли мы ладьи одинаковыми, возникнуть не мог. Но во многих задачах с однородными объектами, приступая к решению, надо ясно представлять, считаются ли эти объекты неразличимыми.

Пример 4. Сколькими способами можно поставить на доску восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

В этой задаче подразумевается (хотя прямо и не говорится), что ладьи одинаковые, неразличимые. Очевидно, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали должна стоять только одна ладья. Будем расставлять ладьи последовательно, начиная с первой горизонтали. На первой горизонтали 8 клеток, и первую ладью можно поставить на любую из них. Когда мы будем ставить вторую ладью, то на второй горизонтали ей будут доступны 7 клеток и т.д. По правилу произведения получаем, что всего таких позиций 8!

Если же считать ладьи различными (как в примере 3), то число перестановок ладей равно

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (8!)^2$$

Действительно, для первой ладьи можно выбрать любое поле доски размером 8×8, вторая ладья фактически ставится на квадратную доску 7×7 (мы удалили одну горизонталь и одну вертикаль и «сдвинули» оставшиеся части доски) и т.д.

Зафиксируем одну из таких расстановок различных ладей. Число перестановок ладей на выделенных полях равно 8! (результат примера 1). Если мы считаем ладьи одинаковыми, то $(8!)^2$ позиций разбиваются на классы по 8! позиций в каждом, и все позиции данного класса будут одинаковыми. Поэтому число перестановок одинаковых ладей равно $(8!)^2 / 8! = 8!$, что совпадает с ранее полученным ответом.

Второе решение, проведенное в два этапа, в данном случае не является оптимальным, однако бывают ситуации, в которых применение такой схемы становится естественным.

Пример 5. Сколь различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

В слове «комбинаторика» 13 букв. Если бы все они были различны, то, переставляя их, можно было бы получить 13! слов. Но в нашем слове буквы к, о, и, а встречаются по два раза. Обозначим их $к_1, к_2, о_1, о_2, и_1, и_2, а_1, а_2$. Ясно, что слова, отличающиеся перестановкой букв $к_1$ и $к_2$ – одинаковые, так что 13! Слов разбиваются на пары одинаковых. Следовательно, если мы не различаем $к_1$ и $к_2$, то число всех слов будет равно 13!/2!. Но эта совокупность также разбивается на пары одинаковых с точки зрения буквы “о„ слов и т.д.

Ответ: $\dfrac{13!}{2!2!2!2!} = \dfrac{13!}{16}$.

Пример 6. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные? Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Всего нечетных цифр – пять, поэтому выбор *k*-й цифры числа может быть сделан $n_k = 5$ способами (*k* =1, 2, 3, 4) а количество четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Чтобы ответить на второй вопрос, проще не определять последовательно, сколько существует чисел, в записи которых ровно одна четная цифра, две, три, четыре, а воспользоваться полученным ответом на первый вопрос. Все четырехзначные числа, а их 9999-999=9000, делятся на две группы: те, в записи которых все цифры нечетные, и те, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра. Следовательно, количество чисел второго типа равно 9000-625=8375.

Ответ: 8375.

Обратите внимание на идею, которую мы использовали – переход к дополнению изучаемого множества. Это пример применения второго общего правила комбинаторики – **правила суммы.** Приведем это правило в двух формулировках (как и правило произведения):

1) Если множество *A* состоит из *m* элементов, а множество *B* из *n* элементов, причем, эти множества не имеют общих элементов (т.е. $A \cap B = 0$), то их объединение $A \cup B$, т.е. совокупность всех элементов из *A* и *B*, содержит *m* + *n* элементов.

2) Если объект *a* можно выбрать *m* различными способами, а объект *b* можно выбрать *n* различными способами, причем результаты выбора объектов *a* и *b* никогда не совпадают, то выбор “либо *a*, либо *b*» можно осуществить *m* + *n* различными способами.

Часто в задачах приходится применять сразу оба правила комбинаторики.

Пример 7. Сколько различных пар можно образовать из 28 костей домино так, чтобы кости, входящие в пару, можно было приложить друг к другу?

Выбор пары костей – это выбор двух карточек вида $\boxed{a_1 \mid b_1}$, $\boxed{a_2 \mid b_2}$, где можно считать, что $a \le b$. По условию надо найти число всех таких неупорядоченных пар, но ясно, что их вдвое меньше, чем упорядоченных. Нам проще найти число упорядоченных пар, т.к. в этом случае можно применить правило произведения.

Выберем первую кость – это можно сделать 28 способами, из них в 7 случаях кость окажется дублем, т.е. кость вида $\boxed{a \mid a}$, а в 21 случае – кость вида $\boxed{a \mid b}$, $a < b$. В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами, а число способов выбора пары костей по правилу произведения равно $7 \cdot 6 = 42$.

Во втором случае вторую кость можно выбрать 12 способами — 6 костей вида $\boxed{a \mid *}$ и 6 костей вида $\boxed{* \mid a}$,а число способов выбора пары равно $21 \cdot 12 = 252$.

Следовательно по правилу суммы всего получается 42 + 252 = 294 способа выбора упорядоченной пары.

Ответ: 147 пар.

В последней задаче мы опять встретились с новой идеей: переходом от изучения неупорядоченных совокупностей элементов к изучению упорядоченных наборов.

Разберем еще одну важную задачу, в решении которой применяется правило произведения.

Пример 8. Найти число подмножеств множества *A*, состоящего из *n* элементов.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, тогда с каждым подмножеством *X* множества *A* можно связать карточку-паспорт вида

0	1	0	...	1	1
1	2	3		$n-1$	n

В этом паспорте в *к*-й клетке стоит 1, если $a_k \in X$, 0 — если $a_k \notin X$. Ясно, что по каждому подмножеству *X* однозначно строится паспорт, на верно и обратное: каждый паспорт однозначно определяет множество X. В частности, паспорт из нулей соответствует пустому множеству, а паспорт из единиц — множеству A.

Но число таких паспортов по правилу произведения равно 2^n, т.к. каждая клетка может быть заполнена двумя способами независимо от того, как заполняются другие клетки.

Ответ: 2^n.

В предисловии уже говорилось, что некоторые стандартные схемы в комбинаторике получили свои названия. Среди них самыми важными являются понятия: «размещение», «перестановка» и «сочетание».