§ 2. Об изображении фигур в стереометрии

Чертежи, которыми сопровождаются решения стереометрических задач, должны быть выполнены с учетом свойств параллельного проектирования (эти свойства изложены в школьном учебнике). Точнее говоря, каждый чертеж обязан представлять собой *изображение,* т.е. фигуру, подобную параллельной проекции рассматриваемой пространственной конфигурации на некоторую плоскость. При выполнении чертежа необходимо учитывать также естественное требование о наглядности изображения.

а) ***Изображение плоских многоугольников***

Справедливо следующее утверждение: *изображением данного треугольника может служить любой треугольник.*

Для изображения плоского многоугольника выделяют в нем три вершины: A_1, A_2, A_3. Затем строят изображение треугольника $A_1A_2A_3$ в виде произвольного треугольника. Изображения остальных вершин многоугольника строится уже однозначно согласно правилам параллельного проектирования.

Пример 2. Построить изображение квадрата $ABCD$.

□ Построим изображение треугольника ABC – произвольный треугольник $A_1B_1C_1$. Так как *при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные*, то точка D_1 –изображение вершины D – является точкой пересечения прямых a и b, проходящих соответственно через точки A_1 и C_1 параллельно прямым B_1C_1 и A_1B_1 соответственно (рис.5). Построение точки D_1 завершает решение задачи.

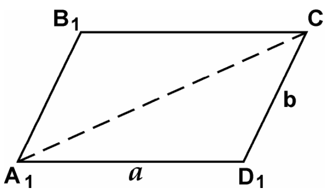

Рис. 5

б) ***Изображение многогранников***

Справедливо следующее утверждение (теорема Польке – Шварца): **изображением данного тетраэдра может служить любой четырехугольник с проведенными в нем диагоналями** (не обязательно выпуклый). Для изображения многогранника выделяют в нем четыре вершины: A_1, A_2, A_3, A_4. Затем строят изображение тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ – произвольный четырехугольник с проведенными в нем диагоналями. Изображения остальных вершин многогранника строятся уже однозначно.

Пример 3. Построить изображение параллелепипеда.

□ Любая вершина параллелепипеда и три вершины, соединенные с ней ребрами, являются вершинами тетраэдра. Его изображение – произвольный четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ с проведенными в нем диагоналями (на рис.6 он не выпуклый). Как и в примере 2, изображением любой грани параллелепипеда является параллелограмм, следовательно, $A_1A_3B_2A_4A_2B_4B_1B_3$ – искомое изображение.

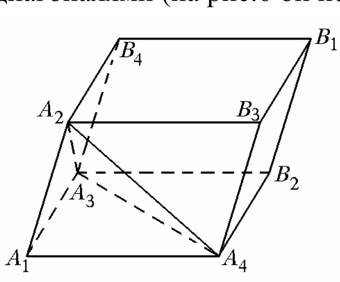

Рис. 6

Пример 4. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды.

□ Если $SABCDEF$ – данная пирамида, то в основании лежит правильный шестиугольник и высота SD попадает в его

центр. Построим вначале произвольный четырехугольник $S_1A_1E_1C_1$ – изображение тетраэдра $SAEC$ (рис.7). Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ точка – O является точкой пересечения медиан треугольника ACE (рис.8). В то же время, при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, поэтому точка M, середина AC, проектируется в точку M_1 – середину отрезка A_1C_1,
а точка O, делящая отрезок EM в отношении 2:1, считая от точки E, проектируется в точку O_1, делящую отрезок E_1M_1 в том же отношении. Значит, O_1 – точка пересечения медиан треугольника $A_1C_1E_1$, и мы ее можем построить. Наконец,

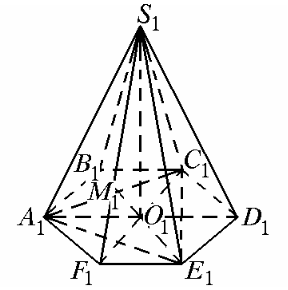

Рис. 7

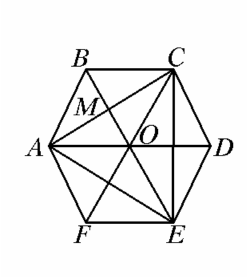

Рис. 8

точки D, F и B симметричны точкам A, C и E относительно точки O, поэтому точки D_1, F_1, B_1 симметричны точкам A_1, C_1, E_1 относительно O_1.