

Контрольные вопросы

В вопросах 1 – 8 рассматриваются плоскость α , заданная уравнением $x + y - 2z - 6 = 0$, и точка $A(5, -1, -4)$ и $B(3, 0, -3)$.

- 1(2). Составить уравнение плоскости β , проходящей через точки A, B и начало координат.
- 2(2). Найти угол между плоскостями α и β .
- 3(2). Найти угол между прямой AB и плоскостью α .
- 4(3). Найти координаты ортогональной проекции точки A на плоскость α .
- 5(2). Найти координаты точки A^* , симметричной точке A относительно плоскости α .
- 6(2). Составить уравнение плоскости γ , проходящей через точку A параллельно плоскости α , и найти расстояние от точки B до плоскости γ .
- 7(2). Составить уравнение плоскости, каждая точка M которой равноудалена от точек A и B , т. е. $MA = MB$.
- 8(2). Составить уравнение сферы с центром в точке A и касающейся плоскости α .
- 9(2). Составить уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 14 = 0$ в ее точке $(-1, 2, 1)$.
- 10(2). Около сферы радиуса r описан многогранник объема V , площадь полной поверхности которого равна S . Верно ли, что $r = \frac{3V}{S}$?
- 11(2). Докажите, что в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости $B_1 CD_1$.
- 12(3). Скрещивающиеся диагонали двух противоположных граней параллелепипеда служат противоположными ребрами тетраэдра. Как относятся объемы тетраэдра и параллелепипеда?
- 13(2). Привести пример 4^x угольной пирамиды, в которую можно вписать сферу, но около которой нельзя описать сферу.

Задачи

(При введении системы координат или разложении по трем векторам просьба следовать указаниям к задаче: это облегчит проверку Ваших решений, и Вам будет проще сравнить свои и присланные решения).

- 1(5). Даны координаты 4^x точек параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $A_1(1; -1; 2)$ – вершина, $O\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ – центр параллелепипеда, $M\left(1; 0; -\frac{1}{2}\right)$ – центр грани $ABCD$ и $K\left(1; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ – центр грани $BCC_1 B_1$. Найти координаты вершин A, B, D и расстояние от вершины A_1 до прямой DK .
- 2(6). В правильной 4^x - угольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SA и диагональ основания BD образуют равные углы с плоскостью боковой грани SBC . Определить величину этого угла

(при координатном методе решения начало координат поместите в точку B , а оси OX и OY направьте по BC и BA соответственно).

3(7). Точки M и N – середины ребер BD и AC правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1. Точка E лежит на прямой AM , точка F – на прямой DN . Полагая $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, выразить вектор \overrightarrow{EF} через векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и найти длину отрезка EF в случае:

а) $EF \parallel BC$;

б) EF – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AM и DN .

4(7). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:

а) ребер AB , AD , AA_1 и плоскости B_1CD_1 ;

б) ребер AB , AD , AA_1 и прямой CD_1 .

(При координатном методе решения начало координат поместите в точку A , оси OX и OY направьте по AD и AB соответственно.)

5(6). Точка D – середина бокового ребра CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC . Прямые AB_1 , BC и DA_1 попарно перпендикулярны. Найти высоту призмы, если $AB = BC = AB_1 = a$ (можно ввести $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$).

6(6). Основание пирамиды $SABC$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Двугранный угол пирамиды при ребре AB равен $\arccos \frac{5}{7}$, двугранные углы пирамиды при ребрах AC и BC равны $\frac{2}{3}\pi$, радиус вписанной сферы равен $\frac{1}{4}$. Найти объем пирамиды.

7(7). Пирамида $SABCD$ с боковыми ребрами $AS = BS = CS = 2$ вписана в сферу радиуса $\frac{5}{3}$. Линия пересечения плоскостей ASD и BSC касается сферы. Найти объем пирамиды, если $AB = BC = \frac{8}{5}$.

8(7). Дана пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC . Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA , DB и DC , ее центр лежит в грани ABD . Радиус цилиндра равен 3 объем пирамиды равен $27 \cdot \sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найти

а) двугранный угол между гранями ABC и ABD ;

б) радиус описанной около пирамиды $ABCD$ сферы.

9(7). Две сферы радиуса R касаются друг друга. Через точку M проведены две прямые, касающиеся данных сфер. Первая прямая касается сфер в точках A и B , вторая – в точках C и D , точки A и C лежат на одной сфере. Известно, что $\angle BMD = 60^\circ$, $AB = 3 \cdot CD$ и $MB > MA$. Найти длину CD .