

## § 1. Векторы в пространстве. Координатный метод решения задач стереометрии

Вектором называется направленный отрезок, и буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия: абсолютная величина (длина) вектора, равенство векторов, угол между векторами.

Напомним некоторые отличия, связанные с трехмерностью пространства, и важные для приложений понятия и утверждения.

1°. В трехмерном пространстве вектор имеет три координаты: если в прямоугольной декартовой системе координат точка  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  – его начало, а точка  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  – его конец, то координатами вектора  $\overrightarrow{A_1A_2}$  называют числа  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ . Записывается

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

2°. Арифметические действия – сумма векторов  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  и произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  определяются аналогично двумерному случаю:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$\lambda \vec{a} = \vec{d}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

и сохраняются все свойства этих операций.

3°. Длина вектора  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4°. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой.

Вектор  $\vec{b}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\vec{a}$  тогда и только тогда, когда существует число  $\lambda$  такое, что  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ . У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

5°. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  определяется равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между этими векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}\vec{b})$$

(здесь  $\vec{a}\vec{b}$  угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ).

Отсюда следует, что длина отрезка  $AB$  находится по известному вектору  $\overrightarrow{AB}$  по формуле  $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$ .

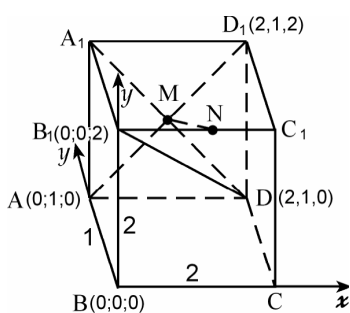
6°. Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

### I. Угол между прямыми

*Углом между прямыми  $a$  и  $b$  называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными двум данным.* Угол между прямыми измеряется от 0 до 90°. Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – ненулевые век-

торы, лежащие на прямых  $a$  и  $b$ , и  $\varphi$  – угол между этими прямыми, то



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

**Задача 1.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , в котором  $AB=1$ ,  $AD=2$ ,  $AA_1=2$ . Точка  $M$  – середина диагонали  $AD_1$  грани  $AA_1D_1D$ , точка  $N$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Найти угол, который образует диагональ параллелепипеда  $B_1D$  с а) прямой  $AD_1$ , б) прямой  $MN$ .

Рис. 1

Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке  $B$ , как показано на рис.1. Определяем координаты точек  $B_1$ ,  $D$ ,  $A$ ,  $D_1$ ,  $M$  и  $N$  и находим координаты векторов  $\vec{B_1D}$ ,  $\vec{AD_1}$  и  $\vec{MN}$ :

$$B_1(0;0;2), D(2;1;0) \Rightarrow \vec{B_1D} = (2;1;-2);$$

$$A(0;1;0), D_1(2;1;2) \Rightarrow \vec{AD_1} = (2;0;2);$$

$$M(1;1;1), N(1;0;2) \Rightarrow \vec{MN} = (0;-1;1).$$

Так как  $\vec{B_1D} \cdot \vec{AD_1} = 0$ , то  $B_1D \perp AD_1$ , угол между прямыми  $B_1D$  и  $AD_1$  равен  $90^\circ$ .

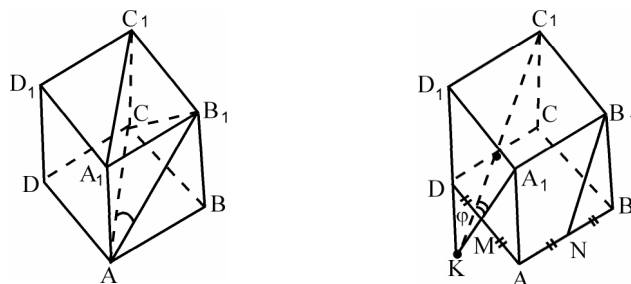
Если  $\varphi$  – угол между прямыми  $MN$  и  $B_1D$ , то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{B_1D}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{B_1D}|} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

значит прямые  $MN$  и  $B_1D$  образуют угол  $45^\circ$ . ▲

**Замечание 1.** При координатном методе решения удобно делать большой рисунок и координаты соответствующих точек выписывать на этом рисунке. Как правило, ошибок бывает меньше.

**Замечание 2.** В ряде задач угол между прямыми в пространстве все же удобнее находить как равный ему угол треугольника, который образуется при параллельном переносе одной прямой до пересечения с другой. Вот два примера с кубом (ребро куба равно  $a$ ):



а) Угол между прямыми  $AB_1$  и  $A_1C_1$  равен углу  $CAB_1$ , т.к.  $AC \parallel A_1C_1$ , и равен  $60^\circ$  ( $\triangle AB_1C$  – правильный).

б) Угол между прямыми  $A_1M$  и  $B_1N$  ( $M$  и  $N$  середины ребер) равен углу  $C_1KA_1$  ( $C_1K \parallel B_1N$ ),  $D_1K = 2a$ ,  $C_1K = A_1K = a\sqrt{5}$ ,  $A_1C_1 = a\sqrt{2}$ , по теореме косинусов  $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ .

## II. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

**Задача 2.** В условиях задачи 1 найти расстояние от точки  $M$  до прямой  $B_1D$ .

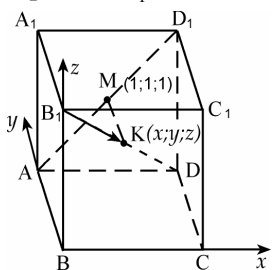


Рис. 2

$\Delta$  Предположим, что точка  $K$  лежит на прямой  $B_1D$  и  $MK \perp B_1D$ . Требуется найти длину отрезка  $MK$ . Пусть  $(x; y; z)$  – координаты точки  $K$ . Вектор  $\overrightarrow{B_1K}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{B_1D}$ , т.е.  $\overrightarrow{B_1K} = \lambda \overrightarrow{B_1D}$ .

Имеем:  $B_1(0; 0; 2)$ ,  $\overrightarrow{B_1K}(x; y; z - 2)$  и  $\overrightarrow{B_1D}(2; 1; -2)$ . Из равенства,  $\overrightarrow{B_1K} = \lambda \overrightarrow{B_1D}$ , т.е.  $(x; y; z - 2) = \lambda(2; 1; -2)$  следует  $x = 2\lambda$ ,  $y = \lambda$ ,  $z - 2 = -2\lambda$ . Вектор  $\overrightarrow{MK}(x - 1; y - 1; z - 1)$  перпендикулярен вектору  $\overrightarrow{B_1D}(2; 1; -2)$ , их скалярное произведение равно нулю, поэтому

$$2(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0.$$

Подставляем сюда  $x = 2\lambda$ ,  $y = \lambda$ ,  $z = 2 - 2\lambda$ , находим  $\lambda = \frac{5}{9}$ , тогда

$K\left(\frac{10}{9}; \frac{5}{9}; \frac{8}{9}\right)$  и координаты вектора  $\overrightarrow{MK}$  таковы:  $x - 1 = 2\lambda - 1 = \frac{1}{9}$ ,

$z - 1 = (2 - 2\lambda) - 1 = 1 - 2\lambda = -\frac{1}{9}$ ,  $\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}\right)$ . Определим длину

вектора  $\overrightarrow{MK}$ , т.е. расстояние от точки  $M$  до прямой

$B_1D$ :  $|\overrightarrow{MK}| = MK = \sqrt{\frac{16+1+1}{81}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . Заметим, что также определено и

положение точки  $K$ , известны ее координаты и, например, можно найти

$$B_1K : B_1D = \frac{5}{9}. \blacktriangle$$

## III. Уравнение плоскости. Угол между плоскостями.

### Угол между прямой и плоскостью

В прямоугольной системе координат плоскость задается уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ , причем вектор  $\vec{n}(a; b; c)$  перпендикулярен этой плоскости (его называют нормалью к плоскости).

Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(a; b; c)$  в векторной форме имеет вид  $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$  (здесь  $M(x; y; z)$  – произвольная точка этой плоскости), а в координатной форме

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

### Угол между плоскостями

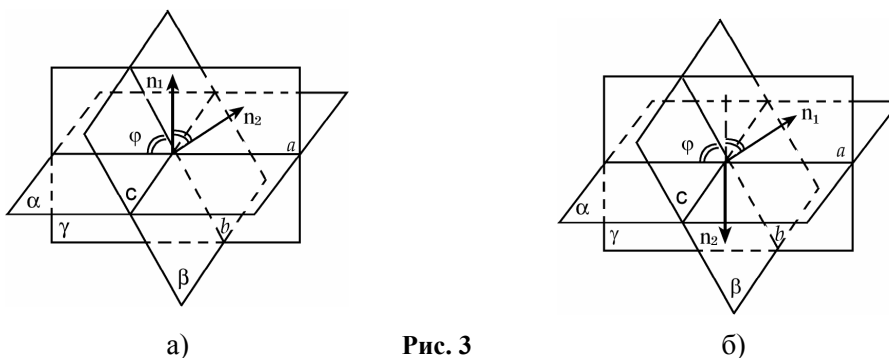


Рис. 3

Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . Плоскость  $\gamma$  перпендикулярна прямой  $c$  и пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по прямым  $a$  и  $b$ . Угол между прямыми  $a$  и  $b$  называется углом между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . Как и угол между прямыми, он лежит в диапазоне от  $0$  до  $90^\circ$ . Угол между плоскостями либо равен углу между векторами, перпендикулярными плоскостям (рис. 3а), либо дополняет его до  $180^\circ$ . В обоих случаях  $\cos \varphi = |\cos \vec{n}_1, \vec{n}_2|$ . Итак, векторы  $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$  и  $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$  соответственно перпендикулярны плоскостям

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

угол между этими плоскостями определяется из равенства

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \quad (1)$$

**Задача 3.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Точка  $M$  – середина ребра  $AB$ , точка  $K$  – середина ребра  $DD_1$ . Найти угол между плоскостями  $AKB_1$  и  $KMC$ .

$\Delta$  Введем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку  $A$ , как показано на рис. 4.

Составим уравнение плоскости  $AKB_1$ . Пусть оно имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (2)$$

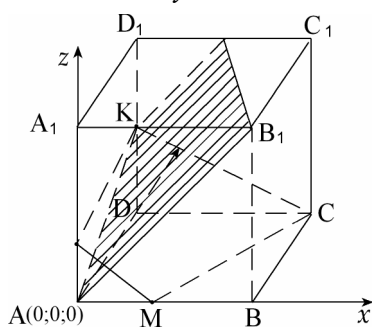


Рис. 4

Точка  $A(0;0;0)$  принадлежит этой плоскости, следовательно  $d = 0$ .

Подставим координаты точек  $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$  и  $B_1(1;0;1)$  в уравнение (2) при  $d = 0$ , получим  $b + \frac{c}{2} = 0$  и  $a + c = 0$ . Таким образом

$$b = -\frac{c}{2}, \quad a = -c \quad \text{и уравнение (2)}$$

принимает вид  $-cx - \frac{c}{2}y + cz = 0$ . Сокращая на  $c$  и умножая на  $(-2)$ , приведем уравнение к виду  $2x + y - 2z = 0$ .

Составим уравнение плоскости  $KMC$ . Пусть оно имеет вид

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \quad (3)$$

Подставляем координаты точек  $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$ ,  $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$  и  $C(1;1;0)$ , получаем систему

$$\begin{cases} b_1 + \frac{c_1}{2} + d_1 = 0, \\ \frac{a_1}{2} + d_1 = 0, \\ a_1 + b_1 + d_1 = 0. \end{cases}$$

Вычтя из третьего уравнение второе, будем иметь  $\frac{a_1}{2} + b_1 = 0$ , т. е.  $b_1 = -\frac{a_1}{2}$ . Из второго уравнения следует  $d_1 = -\frac{a_1}{2}$ , тогда из первого уравнения получим  $c_1 = 2a_1$ . Уравнение (3) принимает вид  $a_1x - \frac{a_1}{2}y + 2a_1z - \frac{a_1}{2} = 0$  или  $2x - y + 4z = 1$ .

Итак,  $\vec{n}_1(2;1;-2)$ ,  $|\vec{n}_1| = 3$ ,  $\vec{n}_2(2;-1;4)$ ,  $|\vec{n}_2| = \sqrt{21}$  и угол между плоскостями  $AKB_1$  и  $KMC$  находим из равенства

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \left| \frac{-5}{3\sqrt{21}} \right|, \quad \varphi = \arccos \frac{5}{3\sqrt{21}}.$$

Заметим, что для определения угла между плоскостями координатным способом построение сечений не предусматривается. На рис. 4 сечения изображены для полноты картины. ▲

### Угол между прямой и плоскостью

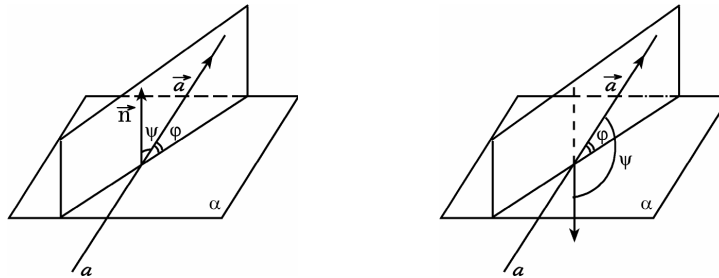


Рис. 5

Углом между прямой, наклоненной к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и ее перпендикулярной проекцией на эту плоскость. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен  $90^\circ$ , если прямая и плоскость параллельны, угол между ними равен  $0$ .

Пусть прямая  $a$  образует с плоскостью  $\alpha$  угол  $\varphi$  (рис. 5),  $\vec{a}$  – ненулевой вектор, лежащий на прямой  $a$  и пусть угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{n}$  равен  $\psi$ . Либо  $\varphi + \psi = 90^\circ$  (когда  $0 \leq \psi \leq 90^\circ$ ), либо  $\psi - \varphi = 90^\circ$  (когда  $90^\circ < \psi < 180^\circ$ ), но в обоих случаях  $\sin \varphi = |\cos \psi|$ , т. е.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}.$$

Итак, если вектор  $\vec{n}(a; b; c)$  перпендикулярен плоскости  $\alpha$ , то угол  $\varphi$  между этой плоскостью и прямой  $a$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$ , определяется из равенства

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \overrightarrow{AB}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}. \quad (4)$$

**Задача 4.** В условиях задачи 3 найти угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $AKB_1$ .

Δ Плоскость  $AKB_1$  в рассматриваемой системе координат имеет уравнение вида  $2x + y - 2z = 0$ , вектор  $\vec{n}(2; 1; -2)$ ,  $|\vec{n}| = 3$ . На

прямой  $KM$  рассмотрим вектор  $\overrightarrow{KM}$ :  $K\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$ ,  $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ ,

$\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Угол  $\varphi$  между прямой  $KM$  и плоско-

стью  $AKB_1$  находим по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{KM}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{KM}|} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \quad \blacktriangle$$

#### IV. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости  $\beta$ , прямая  $b$  лежит в плоскости  $\beta$ , точка  $B$  лежит на прямой  $b$  (рис. 6). Очевидно, что расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\alpha$  равно расстоянию от прямой  $b$  до плоскости  $\alpha$  и равно расстоянию между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

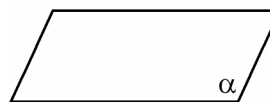
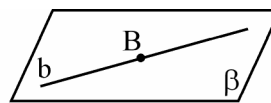


Рис. 6

Рассмотрим две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Проведем через прямую  $a$  плоскость  $\alpha$ , параллельную прямой  $b$  (рис. 7). Через прямую  $b$  проведем плоскость, перпендикулярную плоскости  $\alpha$ , пусть линия пересечения этих плоскостей  $b_1$  (эта прямая есть проекция прямой  $b$  на плоскость  $\alpha$ ). Точку пересечения прямых  $a$  и  $b_1$  обозначим  $A$ . Точка  $A$  является проекцией некоторой точки  $B$  прямой  $b$ . Из того, что  $AB \perp \alpha$  следует, что  $AB \perp a$  и  $AB \perp b_1$ ; кроме того,  $b \parallel b_1$ , значит  $AB \perp b$ . Прямая  $AB$  пересекает скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  и перпендикулярна и той, и другой.

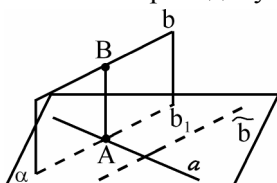


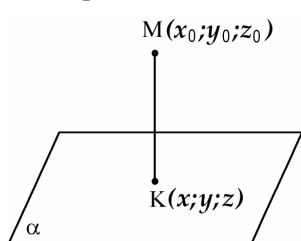
Рис. 7

Отрезок  $AB$  называется *общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми и равна расстоянию от любой точки прямой  $b$  до плоскости  $\alpha$ . Задача нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми не

требует построения их общего перпендикуляра и совпадает с задачей определения расстояния от точки до плоскости.

**Задача 5.** Найти расстояние от точки  $M(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .  $\Delta$

Пусть прямая, проходящая через точку  $M$  перпендикулярно плоскости  $\alpha$ , пересекает ее в точке  $K$  с координатами  $(x; y; z)$ . Вектор  $\overrightarrow{MK}$  перпендикулярен плоскости  $\alpha$ , как и вектор  $\vec{n}(A; B; C)$ , т. е. векторы  $\overrightarrow{MK}$  и  $\vec{n}$  – коллинеарны,  $\overrightarrow{MK} = \lambda \vec{n}$ .



Так как  $\overrightarrow{MK}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$  и  $\vec{n}(A; B; C)$ , то  $x - x_0 = \lambda A$ ,  $y - y_0 = \lambda B$ ,  $z - z_0 = \lambda C$ .

Точка  $K$  лежит в плоскости  $\alpha$ , ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляем  $x = x_0 + \lambda A$ ,  $y = y_0 + \lambda B$ ,

$z = z_0 + \lambda C$  в уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,

**Рис. 8** получаем

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0,$$

откуда  $\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$ .

Находим длину вектора  $\overrightarrow{MK}$  которая и равна расстоянию от точки  $M(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ :  $|\overrightarrow{MK}| = |\lambda \vec{n}| = |\lambda| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ .

Итак, расстояние  $h$  от точки  $M(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  таково

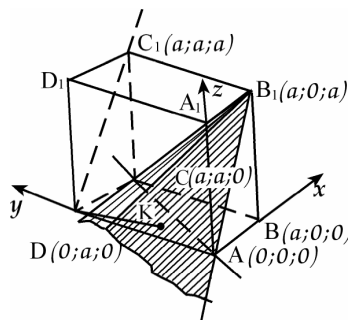
$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (5)$$

Например, расстояние  $h$  от точки  $M(2; -3; 1)$  до плоскости  $x - 2y + 2z - 1 = 0$

таково

$$h = \frac{|2 - 2(-3) + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3. \blacktriangle$$

**Задача 6.** Ребро куба равно  $a$ . Найти расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.



**Рис. 9**

$\Delta$  Рассмотрим, например, прямые, на которых лежат диагонали  $AC$  и  $DC_1$  граней куба (рис. 9).

Диагональ  $AB_1$  грани  $AA_1B_1B$  параллельна прямой  $DC_1$ , поэтому прямая  $DC_1$  параллельна плоскости  $AB_1C$ . Расстояние между скрещивающимися прямыми  $DC_1$  и  $AC$  равно расстоянию от

прямой  $DC_1$  до плоскости  $AB_1C$  и равно расстоянию от любой точки

прямой  $DC_1$  до плоскости  $AB_1C$ .

Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке  $A$  так, как показано на рис. 9 и вычислим координаты отмеченных точек.

Пусть уравнение плоскости  $AB_1C$  (будем также обозначать ее  $\alpha$ )  $kx + by + cz + d = 0$  (не используем букву  $a$ , поскольку она обозначает ребро куба).

$$A(0;0;0) \in \alpha \Rightarrow d = 0;$$

$$C(a;a;0) \in \alpha \Rightarrow ka + ba = 0 \Rightarrow b = -k;$$

$$B_1(a;0;a) \in \alpha \Rightarrow ka + ca = 0 \Rightarrow c = -k.$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнение плоскости:  $kx - ky - kz = 0$ , сокращая на  $k$ , получим  $x - y - z = 0$ .

Найдем расстояние  $h$  от точки  $D(0;a;0)$  прямой  $DC_1$  до этой плоскости по формуле (5):

$$h = \frac{|0 - a + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми  $DC_1$  и  $AC$ .

Приведем другое решение этой задачи, другой метод определения расстояния от точки (прямой) до плоскости, не используя координаты, но простой и часто применяемый. Он основан на вычислении объема треугольной пирамиды двумя способами. Рассмотрим треугольную пирамиду  $AB_1CD$ . Искомое расстояние от точки  $D$  до плоскости  $AB_1C$  равно высоте  $h$  этой пирамиды, опущенной из вершины  $D$ , поэтому для пирамиды  $AB_1CD$  ее объем  $V = \frac{1}{3} S_{AB_1C} h$ .

Треугольник  $AB_1C$  правильный со стороной  $a\sqrt{2}$ , его площадь равна  $\frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ . Итак,  $V = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h$ .

Объем  $V$  этой же пирамиды легко вычисляется, если в качестве основания рассмотреть грань  $ACD$ , так как  $S_{ACD} = \frac{1}{2} a^2$ , а высота пирамиды, опущенная из вершины  $B_1$  на плоскость  $ACD$ , очевидно, равна  $BB_1 = a$ . Находим  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 a = \frac{a^3}{6}$ .

Из равенства  $\frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h = \frac{a^3}{6}$  определяем  $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . ▲