§ 3. Сочетания

Определение. Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \le n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через C_n^k.

Символ C_n^k читается: «це из n по k» или «число сочетаний из n по k». С – первая буква французского слова Combinaison – «сочетание».

Выведем формулу для нахождения C_n^k. Из любого набора, содержащего k элементов, можно с помощью перестановок получить k! Упорядоченных выборок объема k, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Отметим, что формула (4) справедлива при k = 0, т.к. мы условились считать, что 0!=1. Выпишем несколько частных случаев формулы (4):

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Пример 11. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, защитников – $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способом, нападающих – $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ способами. Всего, по правилу произведения, существует $2 \cdot 21 \cdot 120 = 5040$ способов выбора стартовой шестерки.

Ответ: 5040.

Пример12. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых и число треугольников, образованных этими прямыми.

Число точек пересечения прямых равно числу способов выбора неупорядоченной пары прямых, т.е. C_n^2. Аналогично, каждый треугольник определяется тройкой прямых, поэтому общее число треугольников равно C_n^3.

Ответ: C_n^2 и C_n^3.

Пример 13. Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

Задачи для первого варианта можно выбрать C_{28}^7 способами. После этого останется 21 задача, так что второй вариант можно составить C_{21}^7 способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать C_{14}^7 способами, а для четвертого – $C_7^7 = 1$ способом.

По правилу произведения получаем число $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7$. Но так как варианты равноправны, то полученное число надо разделить на 4!

Ответ: $\frac{1}{4!}C_{28}^{7}C_{21}^{7}C_{14}^{7}C_{14}^{7}=\frac{28!}{4!(7!)^{4}}$.

Отметим, что полученное число имеет порядок 10^{13}; число $n!$ С ростом n растет очень быстро: например, если 10! = 3 628 800, то 20! = 2 432 902 008 176 640 000.

С точки зрения теории множеств C_n^k – это число всех подмножеств из k элементов, которые можно выбрать из множества, состоящего из n элементов. Поэтому равенство $C_n^0=1$ означает, что всякое пустое подмножество только одно; $C_n^1=n$ – что число одноэлементных подмножеств равно n и т.д.

Этот взгляд на числа C_n^k позволяет найти комбинаторный смысл следующих арифметических свойств чисел C_n^k:

$$1°.\ C_n^k=C_n^{n-k}, \text{ если } 0\le k\le n;$$

$$2°.\ C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k, \text{ если } 0\le k\le n+1;$$

$$3°.\ C_n^0+C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^n=2^n.$$

Свойство 1° сразу получается из формулы (4):

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=C_n^k,$$

но ясен и его комбинаторный смысл. Выбрав множество из k элементов, мы одновременно получаем подмножество из (n - k) элементов. Например, если из n учеников класса выбирают k человек для поездки на олимпиаду в Москву, то однозначно определяются (n – k) таких, которые в Москву не поедут, и наоборот.

Свойство 2° также легко доказывается, если воспользоваться формулой (4):

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

Комбинаторный смысл свойства 2° выясняется с помощью правила суммы. Предположим, что в классе из n учеников появился новый ученик, и на олимпиаду в Москву решили отправить команду из k + 1 человек. Все такие команды можно разделить на две группы: те команды, в которые входит новичок, и те, в которые он не входит. Число команд в первой группе равно C_n^k – надо дополнить команду k учениками, выбрав их из n оставшихся, а во второй группе число команд равно C_n^{k+1}. Следовательно, $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$.

Свойство 2° позволяет последовательно находить числа C_n^k. В самом деле,

$$C_1^0=C_1^1=1.$$

$$C_2^0=C_2^2=1,\quad C_2^1=C_1^0+C_1^1=2,$$

$$C_3^0=C_3^3=1,\quad C_3^1=C_2^0+C_2^1=3,\quad C_3^2=C_2^1+C_2^2=3,$$

$$C_4^0=C_4^4=1, C_4^1=C_3^0+C_3^1=4, C_4^2=C_3^1+C_3^2=6, C_4^3=C_3^2+C_3^3=4$$

и т.д. Если принять соглашение, что $C_0^0=1$, то все числа C_n^k можно расположить на плоскости в виде бесконечной таблицы, которая называется треугольником Паскаля:

$$\boxed{C_0^0 = 1}$$

$$\boxed{C_1^0 = 1} \quad \boxed{C_1^1 = 1}$$

$$\boxed{C_2^0 = 1} \quad \boxed{C_2^1 = 2} \quad \boxed{C_2^2 = 1}$$

$$\boxed{C_3^0 = 1} \quad \boxed{C_3^1 = 3} \quad \boxed{C_3^2 = 3} \quad \boxed{C_3^3 = 1}$$

$$\ldots$$

В этой таблице в строке с номером n (n = 1, 2, ...) каждое число (кроме двух крайних) равно сумме двух «соседних» с ним чисел строки с номером n - 1.

Приведем аналитическое доказательство свойства 3°, основанное на свойствах треугольника Паскаля. Положим

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Так как каждое число строки с номером n входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки, то $S_{n+1} = 2S_n$. Следовательно, $S_{n+1} = 2S_n = 2^2 S_{n-1} = \cdots = 2^{n+1} S_0 = 2^{n+1}$, т.к. $S_0 = 1$.

Другое – комбинаторное – доказательство свойства 3° фактически было получено в примере 8. Там было найдено, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. С другой стороны, как мы уже отмечали, C_n^k – это число всех подмножеств, состоящих из k элементов, поэтому число всех подмножеств равно (правило суммы)

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Следовательно, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.