

11 класс

1. Найдите последнюю цифру числа $1^2+2^2+\dots+99^2$.
2. Решите уравнение $\sin(7x)+\cos(12x)=2$.
3. Чему равна сумма всех 5-значных чисел, получаемых при перестановках цифр 3, 4, 5, 5, 5?
4. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих равенству $a^2+b^2=a+b+ab$.
5. Рассмотрим трапецию ABCD. На боковых сторонах построены треугольники ABE и CFD так, что $CF\parallel AE$, $DF\parallel BE$. Докажите, что если E лежит на CD, то и F лежит на AB.
6. Среди чисел, записываемых только единицами, существует делящиеся на 1237. Доказать.

10 класс

1. При каких натуральных n число $3n^3+3n^2-2n-2$ является простым?
2. Найдите последнюю цифру числа $1^1+2^2+\dots+9^9+11^1+12^2+\dots+99^9$.
3. Чему равен наименьший общий делитель всех чисел вида $11^n-6^n-5^n$ для натуральных n не меньше двух?
4. Найдите все такие двухзначные числа ab , что для любого числа нулей число $a0\dots0b$ делится на ab . Здесь такая запись означает, что если, например, $ab=35$, то $a=3$, $b=5$.
5. Докажите, что для равностороннего треугольника ABC и точки P на его описанной окружности, её расстояние до одной из вершин равно сумме расстояний до двух других.
6. Рассмотрим трапецию $ABCD$. На боковых сторонах построены треугольники ABE и CFD так, что $CF\parallel AE$, $DF\parallel BE$. Докажите, что если E лежит на CD , то и F лежит на AB .

9 класс

1. Несократимая дробь x/y такова, что $1/2017 < x/y < 1/2016$. Какое наименьшее значение может принимать y ?
2. По кругу расставлены 111 чисел. Самое большое из них равно 78. Известно, что каждое число равно полусумме чисел, стоящих через одно от него. Найдите наименьшее число в круге.
3. Для действительных чисел x, y, z верно $x^2 + y^2 + z^2 = 61$, $xyz = 36$, $1/x + 1/y + 1/z = 5/6$. Чему равно $x + y + z$?
4. Чему равен наименьший общий делитель всех чисел вида $11^n - 6^n - 5^n$ для натуральных n не меньше двух?
5. На одной прямой последовательно находятся три точки A, B и C . С одной стороны от этой прямой на AB и BC построены равносторонние треугольники ABK и BCE . KC и EA пересекаются в точке P , AE и BK в точке H , CK и BE – M . Докажите, что четырёхугольник $PMBH$ вписанный.
6. Докажите, что для равностороннего треугольника ABC и точки P на его описанной окружности, её расстояние до одной из вершин равно сумме расстояний до двух других.

8 класс

1. Для квадратного уравнения $x^2 - \sqrt{35}x + \sqrt{13}$ посчитайте $x_1^2 + x_2^2$.
2. В мешке лежат 25 красных, 15 синих, 28 жёлтых, 13 зелёных и 17 чёрных. Сколько нужно достать минимум шаров из него, чтобы среди них наверняка были шары всех цветов.
3. На доске последовательно выписывают цифры таким образом: каждая последующая равна последней цифре произведения последних двух выписанных цифр. Например, если были выписаны уже 4, 4, 6, то следующей будет 4, т.к. $4 \cdot 6 = 24$. Какая цифра будет на 4315 месте, если изначально были записаны 7, 4.
4. На одной прямой последовательно находятся три точки А, В и С. С одной стороны от этой прямой на АВ и ВС построены равносторонние треугольники АВК и ВСЕ. КС и ЕА пересекаются в точке Р. Найдите угол КРА.
5. По кругу расставлены 150 чисел. Самое большое из них равно 150. Известно, что каждое число равно полусумме своих соседей. Найдите наименьшее число в круге.
6. При каких натуральных n число $2n^3 - 25n + 28$ является простым?