Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

ИНФОРМАТИКА

Элементы теории математических игр

Задание №4 для 11-х классов

(2010 – 2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2011

Составитель: Е.Г. Молчанов, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 11-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2011, 21с.

Составитель:
Молчанов Евгений Геннадьевич
Подписано 15.02.11. Формат 60×90 1/16.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Введение

Начнём с условия задачи из демонстрационной версии ЕГЭ по информатике и ИКТ (пункт С3).

Пример 1.

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучи камней, в первой – три камня, а во второй – два камня. У каждого игрока имеется неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в три раза число камней в какой-либо куче, или добавляет один камень в любую кучу. Выигрывает тот игрок, после хода которого в двух кучах станет не менее 16 камней. Кто выиграет при правильной игре: игрок, сделавший первый ход, или игрок, сделавший второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

К непосредственному разбору этой задачи мы вернёмся позже, однако прежде попытаемся понять, что *означает* сам вопрос: *кто выигрывает при правильной игре*?

Для этого перейдём к определению *математической игры*.

§ 1. Математические игры

***Игрой* называется процесс, в котором участвуют две или более стороны, ведущие борьбу за реализацию своих интересов.**

Пример 2. Можно ли считать олимпиаду по математике игрой?

Решение. Определимся с количеством участников. С одной стороны, каждый выполняет олимпиадные задания самостоятельно и может не обращать внимания на то, что одновременно с ним эти же задания выполняют и другие участники. С другой стороны, участники олимпиады конкурируют между собой, поскольку количество призовых мест ограничено. Поэтому в принципе олимпиада по математике может считаться игрой. Данный пример показывает, что «игрой» согласно написанному выше определению может считаться огромное количество жизненных ситуаций.

Пример 3. Два игрока по очереди пишут цифры на доске слева направо. Если после восьми ходов полученное 8-значное число делится на девять, побеждает второй игрок, иначе – первый. Докажите, что второй игрок может победить как бы ни ходил первый игрок.

Решение. Второй игрок должен дополнять число, написанное первым игроком, до девяти. Если ход первого игрока – «9», то ход второго игрока – «0» и т. п. После восьми ходов получим 8-значное число, сумма цифр которого равна $9*4=36,$ и полученное число будет делиться на девять. Таким образом, второй игрок сможет выиграть *при любых ходах первого игрока*. У второго игрока есть *выигрышная стратегия* (более подробно см. в следующем параграфе).

Зададимся вопросом: а всегда ли существенны действия игроков?

Пример 4. Петя и Вася записывают на двух листах бумаги по натуральному числу (не показывая записи друг другу). Если сумма этих чисел чётна, то выигрывает Петя. Если сумма нечётна, выигрывает Вася. Как играть Пете?

Решение. Ответ на этот вопрос прост: что бы Петя ни написал, его шанс выиграть составляет 50/50. Существуют игры, в которых нет способа, позволяющего игроку выиграть наверняка.

Мы же, наоборот, будем рассматривать игры, в которых как играть – известно одному или обоим игрокам. Одним из самых узких классов таких игр является класс *математических игр.* Математические игры обладают одной особенностью, а именно, один из игроков всегда имеет возможность выиграть, как бы ни играл его соперник.

Будем называть игру *математической*, если для неё выполнены следующие условия:

Условие 1. В игре участвуют два игрока.

Условие 2. Игра заканчивается выигрышем одного из участников. Это автоматически означает проигрыш соперника. Иногда в математических играх допускают ничью.

Условие 3. В игре участники ходят по очереди и помнят все предыдущие ходы.

Условие 4. Игра характеризуется позицией, которая зависит только от ходов игроков.

Пример 5. Два человека встречаются и обмениваются закрытыми сумками, понимая, что одна из них содержит деньги, другая — товар. Каждый игрок может уважать сделку и положить в сумку то, о чём договорились, либо обмануть партнёра, дав пустую сумку. Является ли эта игра математической?

Решение. Во-первых, эта игра не удовлетворяет условию 2: в условии не определено, какой игрок выигрывает в каком случае, а какой автоматически при этом проигрывает. Во-вторых, игроки ходят одновременно, а не по очереди, что нарушает условие 3. Поэтому данная игра не является математической.

Заметим, что условие 2 можно выполнить, считая, что в случае если один игрок обманул другого, обманувший игрок выиграл, а обманутый проиграл, в остальных же случаях (оба игрока честные или оба обманщики) можно зафиксировать ничью. Однако условие 3 уже нельзя выполнить без существенного изменения самой игры.

Пример 6. Петя и Вася подкидывают монетку. Если выпадет герб, выиграет Петя, если выпадет решка, выиграет Вася. Является ли эта игра математической?

Решение. В данной игре от ходов Пети и Васи (если они играют честно) вообще ничего не зависит, всё зависит только от того, как выпадают монетки. Условие 4 говорит, что позиция зависит только от непосредственных ходов самих игроков, т. е. позиция не должна зависеть от монеток, раскладов, игральных кубиков и прочего. Следовательно, эта игра не является математической игрой.

Итак, в математической игре имеются *два игрока, которые ходят поочерёдно*. Участник, который начинает игру, обычно называется *первым* игроком, его соперник – *вторым*. Имеется конечное или бесконечное множество *позиций*. В каждой позиции для обоих игроков указаны допустимые *ходы* – разрешённые переходы в другие позиции. Некоторые позиции объявляются *выигрышными* для какого-то игрока, что автоматически означает, что эти позиции являются *проигрышными* для соперника. Очень часто выигрышными объявляются те и только те позиции, из которых соперник не может сделать ход, т. е. выигрывает тот игрок, которому удаётся своим последним ходом достичь позиции, в которой у соперника нет допустимых ходов.

Пример 7. Игра «Ним». Есть две кучи по семь камней в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучи. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Как можно определить позиции в данной игре, и какие позиции будут выигрышными?

Решение. Позицией в данной игре являются два числа (x,y): x – количество камней в первой куче, y – количество камней во второй куче. Игрок выигрывает, если противник не может сделать ход, т. е. перед ходом противника камней в обеих кучах не останется. Таким образом, позиция (0, 0) является выигрышной для того из игроков, который попал туда своим последним ходом.

Особенно отметим следующее.

Во-первых, в играх могут быть *ничьи*. Это значит, что некоторые позиции для обоих игроков объявляются *ничейными*. Игроку целесообразно добиваться ничьей только тогда, когда он не может гарантированно достичь выигрышной позиции.

Во-вторых, оба игрока не обязательно должны преследовать одинаковые цели (например, чтобы противник не смог сделать ход). Так в примере 3 один из игроков стремится к тому, чтобы число камней в куче не делилось на девять, а второй стремится к обратному.

Поэтому позиция должна ещё характеризоваться номером игрока (либо того, который пришёл в эту позицию, либо того, который делает ход из этой позиции). Так, если в примере 7 добавить номер игрока, который делает ход, то позиция в этой задаче будет выражаться тремя числами (x,y,n), где n – номер игрока, который делает ход, имея в начале x камней в первой куче, и y – во второй.

Позиция (0,0,1) будет проигрышной для первого игрока (он не может сделать ход) и выигрышной для второго, позиция (0,0,2) – наоборот.

Однако в играх, в которых игроки преследуют одинаковые цели и возможные ходы у обоих игроков одинаковы (см. пример 7), можно номер игрока из позиции опустить. В этом задании мы будем рассматривать только такие игры.

Пример 8. В точке 0 оси координат находится фишка. За ход игрок обязан подвинуть фишку на единицу влево или вправо. Выигрывает тот игрок, после хода которого координата фишки превысит десять. Как определить позиции в данной игре? Какие позиции следует объявить выигрышными? Какие позиции следует объявить ничейными?

Решение. Позицией является целое число (x): положение фишки на оси координат. При этом все позиции с $x > 10$ будут проигрышными для первого игрока и выигрышными для второго. Стартуя из позиции (10), первый игрок может одним ходом передвинуть фишку в позицию (11) и выиграть. Если же игра начинается из позиции (x), [$x < 10$], то ни первый, ни второй игрок не могут *гарантированно* рассчитывать на победу, так как любой игрок в данной игре может не позволить своему противнику достичь выигрышной позиции, просто двигая каждый раз своим ходом фишку влево. Поэтому, стартуя из позиции (x), [$x < 10$], игра может закончиться выигрышем одного из игроков, если и только если соперник ошибётся. Но что следует считать исходом игры при старте, например, из начала координат (как в условии примера)? Можно было бы считать, что исход игры при старте из начала координат просто не определён. Но мы потребуем выполнения более жёсткого условия.

Дополнительное условие математических игр.

Условие 5. При старте из любой допустимой позиции, как бы ни играли соперники, через конечное (возможно, очень большое) число ходов обязательно достигается либо выигрышная, либо ничейная позиция.

Иначе говоря, независимо от того, как играют оба игрока, через конечное число ходов игра должна закончиться выигрышем одного из соперников или ничьей.

Так в примере 7 условие 5 выполняется, поскольку количество камней с каждым ходом уменьшается, а значит, когда-нибудь камней не останется, и один из игроков выиграет.

Для того чтобы игра из примера 8 удовлетворяла условию 5, нужно кроме уже заданных выигрышных позиций (x), [$x > 9$] объявить все позиции (x), [$x < 10$] ничейными[1].

Чтобы избежать игр с бесконечным количеством ходов, мы можем, например, запретить игрокам ходы, приводящие к полному повторению ранее встречавшихся позиций. Или, наоборот, в таком случае объявлять

[1] Таким образом в примере 8 при старте из любой точки, кроме точки (10), игроки не сделают ни одного хода, и немедленно будет объявлен результат.

ничью. Так в шахматах троекратное повторение одной и той же позиции на доске является поводом для объявления ничьей[2].

§ 2. Стратегия. Правильная игра

Вернёмся к примеру 7 и зададимся вопросом: кто выиграет?

Заметим, что в общем случае может выиграть любой из игроков – для этого его сопернику достаточно «подыграть». Однако второй игрок может выиграть *при любых ходах первого игрока.* Для этого ему нужно брать то же количество камней, которое брал первый игрок предыдущим ходом, но из другой кучи. После хода второго игрока количество камней в обеих кучах будет равным. Если далее первый игрок возьмёт несколько камней в одной из кучек, то после его хода количество камней в кучках станет неодинаковым, а значит, второй игрок сможет уравнять количество камней в кучах и передать ход сопернику. Второй игрок всегда сможет сделать свой ход, а поскольку камней становится все меньше и меньше, наступит момент, когда один их игроков не сможет сделать ход, и это будет первый игрок. Таким образом, второй игрок сможет выиграть в данный игре, как бы ни играл первый.

Выигрышной стратегией назовём набор правил, следуя которым, один из игроков обязательно выиграет **при произвольных ответах соперника**.

Ничейной стратегией назовём набор правил, следуя которым, один из игроков обязательно выиграет или сведёт игру к ничьей **при произвольных ответах соперника**.

Подчеркнём в определении стратегии условие «*при произвольных ответах соперника»*. Важно понимать, что на месте игрока может оказаться что или кто угодно, например компьютер. Нужно уметь отвечать на произвольные ходы соперника и в любом случае выигрывать.

Как было сказано выше, мы пытались выделить игры, в которых один из игроков обязательно выиграет при произвольных ответах соперника. Следующая теорема позволяет утверждать, что математические игры и есть искомый класс игр.

[2] Для фиксации ничьей игрок, заметивший троекратное повторение позиции, должен обратиться к судье.

Теорема. В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия одного из игроков, либо ничейная стратегия для обоих игроков.

Идея доказательства этого утверждения в частном случае будет рассмотрена при решении задач методом *анализа с конца* (см. § 3).

Данная теорема обобщается на случай игр, которые теоретически могут продолжаться бесконечно долго. Для этого в условии теоремы вместо существования ничейной стратегии для обоих игроков нужно потребовать, чтобы каждый игрок имел стратегию, позволяющую данному игроку не проиграть.

Рассмотрим игры, которые завершаются за конечное количество ходов выигрышем одного из игроков (и ничьих нет). Согласно теореме у кого-то из игроков обязательно существует выигрышная стратегия, и он должен выиграть у своего соперника, как бы ни играл последний. Введём понятие *правильной игры*.

Правильной **называется игра, в которой каждый из игроков применяет выигрышную или ничейную стратегию, если она у него есть.**

Так, если игроки из примера 3 играют в правильную игру, второй игрок должен воспользоваться своей выигрышной стратегией (например, дополнять число до девяти; у него может быть также и иная выигрышная стратегия) и довести игру до победы.

Таким образом, ответить на вопрос, заданный в примере 1 (*кто выиграет при правильной игре*?) можно так: необходимо найти определённую стратегию одного из игроков и доказать, что она является выигрышной.

В заключение параграфа отметим, что согласно сформулированной выше теореме выигрышная или ничейная стратегия существуют даже в таких математических играх, как шахматы и шашки. Но если бы кто-то знал эти самые стратегии!..

§ 3. Решение задач

3.1. Удачный ход

Одним из способов нахождения выигрышных стратегий является удачный ответ на ход противника, например учитывающий симметрию.

Пример 9. Два игрока по очереди ставят на шахматную доску ладьи так, чтобы фигуры не били друг друга. Цвет фигур значения не имеет. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выиграет второй игрок. Для этого он должен ставить ладью на место, центрально симметричное полю, на которое текущим ходом поставил свою ладью первый игрок. Докажем от противного, что второй игрок всегда сможет сделать ход.

Пусть это неверно и второй игрок не сможет сделать хода. Разберём два случая.

Случай 1. На поле предполагаемого хода уже стоит ладья. Но эта ладья не могла быть поставлена ранее вторым игроком, так как он ставит ладьи только центрально симметрично ходам первого игрока. Если первый игрок ранее поставил ладью на это поле, то второй игрок был обязан своим ходом поставить ладью на поле, центрально симметричное полю противника. Однако по условию на это поле ладью поставил первый игрок текущим ходом. Получаем противоречие.

Случай 2. Данное поле находится под боем какой-либо ладьи. Заметим, что эта ладья не была поставлена первым игроком на предыдущем ходе, так как две центрально симметричные ладьи не бьют друг друга. Тогда, в соответствии со стратегией второго игрока, ладья, расположенная центрально симметрично данной, также должна уже стоять на доске. Однако эта ладья будет бить ладью, поставленную первым игроком предыдущим ходом. Получаем противоречие.

Таким образом было доказано, что у второго игрока всегда есть допустимый ход, а так как игра должна когда-нибудь закончиться (на шахматной доске всего 64 клетки), то первый игрок когда-то не сможет сделать своего хода и проиграет.

Пример 10. В кучке лежит: а) 30 камней; б) 32 камня. За ход можно взять от одного до четырёх камней из кучи. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. В данном случае работает стратегия дополнения до пяти. Пусть своим ходом первый игрок берёт x $\{1,2,3,4\}$ камней. Тогда в пункте а) второй игрок отвечает ходом $(5 - x)$, и поскольку после каждого его хода количество камней будет делиться на пять, то в итоге второй игрок выиграет.

В пункте б) выигрывает первый игрок. Первым ходом он должен взять два камня и свести задачу к пункту а), в котором он уже будет выступать как второй игрок.

Пример 11. Два игрока перемещают ладью из левого нижнего угла (a1) шахматной доски в правый верхний (h8). За ход можно сместить ладью на любое количество клеток вверх или вправо. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрывает второй игрок. Для этого ему нужно во время ходов возвращать ладью на диагональ, проведённую из левого нижнего угла в верхний правый угол. Подумайте, почему первый игрок проиграет при любых своих ходах.

3.2. Анализ с конца

Вторым важным способом решения задач является решение задачи методом «анализа с конца». Предположим (хотя это и не всегда верно), что для обоих игроков одни и те же позиции являются выигрышными.

Вернёмся к примеру 11.

Для нахождения выигрышной стратегии рассмотрим общую задачу. Предположим, что начальная позиция является параметром, и будем искать выигрышную стратегию при старте с этой позиции. Обозначим знаком «–» позиции, в которых при правильной игре участник, начинающий играть из данной позиции, выиграет, и знаком «+» – позиции, ведущие к поражению[3].

Если игра начинается в поле h8, первый игрок уже проиграл – это позиция «+» (рис. 1).

[3] «+»-позиции иногда называют P-позициями, а «–»-позиции – N-позициями по первым буквам английских слов «Previous» (предыдущий) и «Next» (следующий), указывающими, какой из игроков выиграет при старте из этой позиции – игрок, который пришёл в эту позицию последним ходом, или игрок, совершающий следующий ход из этой позиции.

Далее, если игра стартует с полей h1–h7 или a8–g8, то начинающий игрок может за один ход достичь поля h8 и выиграть. Это позиция «–» (рис. 2).

Рассмотрим ладью, стоящую в поле g7. У первого игрока есть только два хода – g8 и h7. Но в обеих этих позициях стоит «–». Следовательно, второй игрок, стартующий из этих позиций, выиграет. Как бы ни ходил первый игрок, он проиграет. Это снова позиция «+».

Далее, рассмотрим группы полей g1–g6 и a7–f7 (рис. 3). Стартуя из этих полей, первый игрок может за один ход попасть в поле g7 , которое помечено знаком «+». Любой ход второго игрока из g7 ведёт к его проигрышу.

Продолжая таким образом заполнять шахматную доску, мы видим, что знаки «+» размещаются на диагонали a1–h8 (рис. 4). В поле a1 стоит знак «+», поэтому первый игрок потерпит поражение.

8								+
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 1

8	-	-	-	-	-	-	-	+
7								-
6								-
5								-
4								-
3								-
2								-
1								-
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 2

8	-	-	-	-	-	-	-	+
7	-	-	-	-	-	-	+	-
6							-	-
5							-	-
4							-	-
3							-	-
2							-	-
1							-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 3

8	-	-	-	-	-	-	-	+
7	-	-	-	-	-	-	+	-
6	-	-	-	-	-	+	-	-
5	-	-	-	-	+	-	-	-
4	-	-	-	+	-	-	-	-
3	-	-	+	-	-	-	-	-
2	-	+	-	-	-	-	-	-
1	+	-	-	-	-	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 4

Зафиксируем общие правила расстановки знаков «+» и «–»:

1) знаком «–» обозначаются позиции, в которых при правильной игре участник, стартующий из данной позиции, выиграет, и знаком «+» отмечаются позиции, ведущие к поражению;
2) знак «–» ставится в позиции, из которой можно за один ход прийти в позицию со знаком «+»;
3) знак «+» ставится в выигрышных позициях, а также в тех позициях, из которых *все возможные ходы* ведут *только* в позиции, уже отмеченные знаком «–»[4].

Таким образом, сначала нужно расставить знаки «+» в выигрышных позициях. На втором этапе нужно отметить знаком «–» те позиции, которые отделяет от выигрышных один ход. На третьем этапе следует просмотреть все позиции и найти «тупиковые», ведущие к положениям, обозначенным знаком «–». На игровом поле обязательно будет хотя бы одна такая позиция[5]. Второй и третий этапы необходимо поочерёдно повторять до тех пор, пока начальная позиция не будет помечена знаком «+» или «–», что и даст ответ на вопрос, кто выиграет при правильной игре.

Как же должен действовать побеждающий участник игры? Он должен стремиться ходить в позиции, отмеченные знаком «+». При этом после очередного хода соперника он опять окажется в позиции со знаком «–», так как по определению знака «+» все возможные ходы из этой позиции ведут только в позиции со знаком «–». Таким образом, **стратегия выигрывающего игрока формулируется просто: делать ход в позиции, обозначенные знаком «+».** По определению знака «–» из этой позиции существует хотя бы один ход в позицию, отмеченную знаком «+», поэтому такой ход у выигрывающего игрока всегда будет в наличии.

Отметим следующий факт. Если известно, что игра длится не более чем n ходов при любых действиях первого и второго игроков, то начальная позиция **обязательно** будет помечена не более чем за n повторений шагов 2 и 3. Это является идеей доказательства основной теоремы из § 2 в частном случае игр, в которых ничейных позиций нет, и каждая позиция является выигрышной для одного из игроков.

Итак, теперь можно переходить к разбору примера 1.

Пример 1. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучи камней, в первой – три камня, а во второй – два камня. У каждого игрока имеется неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в три раза число камней в какой-либо куче, или добавляет один камень в любую ку-

[4] Недопустимо, чтобы из этой позиции один ход вёл в позицию, обозначенную знаком «+», а другой – вёл в позицию, ещё не обозначенную ни одним из знаков.

[5] Хотя убедиться в этом непросто, мы предлагаем читателю самостоятельно подумать, почему это верно.

чу. Выигрывает тот игрок, после хода которого в двух кучах станет не менее 16 камней. Кто выиграет при правильной игре: игрок, сделавший первый ход, или игрок, сделавший второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

Решение. Попробуем изобразить позиции графически. Рассмотрим таблицу, в которой количество камней в первой куче будет соответствовать номеру столбца, а количество камней во второй куче – номеру строки. Чёрным цветом выделена позиция (2, 3), с которой должна начинаться игра в условии.

1. Выигрышные позиции – точки с координатами x, y, где $x + y \geq 16$. Данные точки обозначим знаком «+» в таблице ниже[6].

2-я куча																	
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12					+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11						+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10							+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9								+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8									+	+	+	+	+	+	+	+	+
7										+	+	+	+	+	+	+	+
6											+	+	+	+	+	+	+
5												+	+	+	+	+	+
4													+	+	+	+	+
3			■											+	+	+	+
2															+	+	+
1																+	+
0																	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1-я куча

[6] Хотя таблица должна быть бесконечной (количество камней может быть сколь угодно большим), достаточно нарисовать таблицу 17×17 – случаи, когда в одной из куч более 16 камней, нас не интересуют, так как все эти позиции являются выигрышными.

2. Далее, ставим знак «–» в позиции, которые отделяет от выигрышных один ход.

По условию, можно либо увеличить одну из кучек в три раза, либо добавить камень в одну из куч, т. е. мы должны поставить знак «–» в позицию (x, y), если верно одно из условий:
$x + y + 1 \geq 16$; $x + 3y \geq 16$; $y + 3x \geq 16$.

2-я куча

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+
5		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
4					-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
3						-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
2						-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
1						-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
0							-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+

1-я куча

3. После этого, ставим знак «+» в те позиции, из которых все ходы ведут только в позиции, обозначенные знаком «–». Таковыми будут позиции (0, 5), (5, 0) и (4, 3), (3, 4).

2-я куча

16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+
5	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
4				+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
3					+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
2						-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
1						-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
0						+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1-я куча

4. Знак «–» ставим в те позиции, стартуя из которых, можно за один ход дойти до одной из позиций, отмеченных знаков «+» (поставленных на этапе 3).

2-я куча																	
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+
5	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
4	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
3			■	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
2					-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
1					-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
0					-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1-я куча

Стартуя из позиций (4, 0), (0, 4), (3, 3), (2, 4), (4, 2), можно попасть в позиции, обозначенные знаком «+», увеличив количество камней в одной из кучек на единицу. Из позиций (1, 4) и (4, 1) можно прийти в позиции со знаком «+», увеличив в три раза количество камней в меньшей куче.

5. Знак «+» ставим в те позиции, из которых все ходы ведут только в позиции, обозначенные знаком «–». На этот раз таковыми будут позиции (2, 3) и (3, 2).

16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
14	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+
5	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
4	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
3			+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
2				+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
1					-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
0					-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

2-я куча

1-я куча

В позиции (2, 3) был поставлен знак «+», а это значит, что **победит второй игрок.**

При оформлении задачи (например, на ЕГЭ) необходимо указать выигрывающего игрока, записать его стратегию и показать, что этот игрок победит при любых ответах соперника. Если имеется таблица позиций, то стратегия выигрывающего игрока формулируется простым правилом: **делать ходы в позиции, отмеченные знаком «+».** Но эту стратегию рекомендуется записать в явном виде. Саму же таблицу позиций при оформлении работы можно не рисовать (она уже сделала своё дело: помогла определить победителя и найти его стратегию).

Образец оформления примера 1.

Покажем, что второй игрок может выиграть при произвольных ответах первого игрока.

Рассмотрим все возможные начальные ходы первого игрока и укажем правильные ответы соперника:

а) если первый игрок в три раза увеличивает число камней в одной из куч, то второй игрок должен увеличить количество камней в этой же куче также в три раза. Тогда в обеих кучах будет как минимум $2*3*3+3=21$ камень. Второй игрок побеждает. Рассмотрение этого случая закончено;

б) если первый игрок из позиции (2, 3) делает ход (2, 4) или (3, 3), то второй игрок должен пойти в позицию (3, 4) (именно она в нашем случае обозначена знаком «+»). Теперь первый игрок делает второй ход (заметим, этот ход не может быть выигрышным). Возможны три варианта:

– первый игрок увеличивает в три раза количество камней в одной из куч. Тогда второй игрок повторяет это действие с оставшейся кучкой камней, получает в сумме 21 камень и выигрывает,

– первый игрок добавляет один камень в первую кучу – позиция (4, 4). Тогда второй игрок увеличивает количество камней в одной из куч в три раза, получает в сумме 16 камней и выигрывает,

– первый игрок добавляет один камень во вторую кучу – позиция (3, 5). Тогда второй игрок увеличивает количество камней во второй куче в три раза, получает в сумме 18 камней и выигрывает.

Таким образом, второй игрок побеждает при любых ходах своего соперника.

Обратите внимание, что стратегию второго игрока можно придумать, не основываясь на таблице позиций. Важно помнить: если вы пропустите или не разберёте хотя бы один ход соперника (проигрывающего игрока), это может быть чревато не только потерей баллов, если стратегия является верной, но и тем, что данная стратегия может оказаться в корне неверной. Также нужно внимательно отнестись к расстановке знаков «+» и «–» в таблице позиций: один неверно поставленный знак может стоить всей задачи. Лучше не торопиться и расставить только те знаки, в которых вы уверены на данный момент. И не страшно, если вы не поставите никакого знака в данной позиции на определённом этапе (например, по правилам его необходимо поставить, но вы этого не заметили). Главное – не поставить неверного знака.

Контрольные вопросы

1(2). Является ли игра «в нарды» математической игрой? Если нет, какому условию она не удовлетворяет?

2(2). Верно ли, что в примерах 7 и 11 описана одна и та же игра с точностью до обозначений? Ответ обоснуйте.

3(2). Два игрока кладут по очереди пятаки на прямоугольный стол так, чтобы монеты не соприкасались с уже выложенными пятаками. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4(3). Два игрока по очереди ставят на шахматную доску слонов так, чтобы фигуры не били друг друга. Цвет фигур значения не имеет. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? Почему в данной игре неприменима «центрально симметричная» стратегия из примера 9?

5(3). Есть три кучки по семь камней в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (См. примеры 7, 11.)

6(3). Покажите, что игра, описанная в примере 1, обязана закончиться за конечное время при любых действиях обоих игроков. Какое максимальное количество ходов возможно в этой игре?

Задачи

1(3). У ромашки 21 лепесток. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2(6). Два игрока перемещают ладью из левого нижнего угла (a1) шахматной доски в правый верхний (h8). За ход можно сместить ладью на любое количество полей вверх или вправо.

А)(3) Кто выиграет при правильной игре, если попадать на поле d4 и проходить через него запрещается?

Б)(3) Если запрещается попадать и проходить через поле c4?

3(4). Есть две кучи по семь камней в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней из одной кучи или по одному камню из обеих куч. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4(5). Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой – один камень, а во второй – два камня. У каждого игрока имеется неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в три раза число камней в какой-либо кучке, или добавляет два камня в одну из куч. Выигрывает тот игрок, после хода которого в обеих кучках станет не менее 16 камней. Кто выигрывает при правильной игре? Опишите стратегию выигрывающего игрока в соответствие с образцом примера 1.

5(6). Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. В начале игры фишка находится в точке с координатами (– 1, – 1). Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами (x, y) в одну из трёх точек: $(x + 2, y)$, $(x, y + 4)$, $(x + 2, y + 2)$. Игра заканчивается, когда расстояние от фишки до начала координат превысит число 10. Выигрывает тот игрок, который сделал последний ход. Кто выигрывает при правильной игре?