**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Федеральная заочная физико-техническая школа**
**при Московском физико-техническом институте**
**(государственном университете)**

# МАТЕМАТИКА

## Элементы комбинаторики. Понятие о вероятности случайного события

Задание №6 для 10-х классов

(2010 – 2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2011

*Составитель*: Е.Г. Молчанов, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №6 для 10-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2011, 24 с.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
**Молчанов Евгений Геннадьевич**
Подписано 21.02.11. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5.
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 1400. Заказ №6-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
ФЗФТШ при МФТИ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

***e-mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)**

# I. Комбинаторика

*Комбинаторикой* (от латинского «combinare» – соединять, сочетать) называют раздел математики, в котором изучаются задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям можно составить из элементов данного множества. Некоторые часто встречающиеся комбинации получили названия, которые, видимо, уже встречались читателю: перестановки, размещения, сочетания.

В первой части этого задания рассматриваются как перечисленные «стандартные» комбинации, так и общие принципы решения комбинаторных задач.

## §1. Правило произведения

Решение многих комбинаторных задач основывается на двух фундаментальных правилах, которые называются *правилом произведения* и *правилом суммы*. В этом параграфе мы познакомимся с первым из них.

**Пример 1.** В магазине продаются синие, красные и зелёные ручки, а также фломастеры 10 разных цветов. Сколькими способами можно купить ручку и фломастер?

**Решение.** Выбрав ручку, фломастер к ней можно купить десятью способами. Так как ручек всего 3, то количество способов купить ручку и фломастер равно $3 \times 10 = 30$. Это количество совпадает с площадью таблицы-прямоугольника $3 \times 10$, каждая строка которого соответствует фломастеру, столбец – ручке, а клетка – комбинации «фломастер-ручка».

**Ответ:** 30.

Сформулируем правило произведения для двух объектов.

**Правило произведения.** Если объект $a_1$ можно выбрать $n_1$ способами, и после каждого такого выбора объект $a_2$ можно выбрать $n_2$ способами, то выбор пары $(a_1, a_2)$ именно в таком порядке можно осуществить $n_1 n_2$ способами.

**Пример 2.** Сколькими способами можно выбрать дежурного и его заместителя в классе из 10 человек?

**Решение.** Из двух выбранных учеников важно, кто из них является дежурным, а кто заместителем дежурного – если ученики поменяются ролями, это будет **другой** способ. Поэтому сначала выберем, например, дежурного, после этого выберем его заместителя.

Дежурного (объект $a_1$) можно выбрать десятью способами. После каждого такого выбора остается 9 кандидатов[1], любой из которых может стать заместителем дежурного (объект $a_2$). По правилу произведения общее количество способов выбрать пару (дежурного и заместителя) равно $9 \times 10 = 90$.

**Ответ:** 90.

**Пример 3.** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи, чтобы они не «били» друг друга?

**Решение.** Выбор объекта $a_1$ – поля для белой ладьи – может быть сделан 64-мя способами. Независимо от этого выбора белая ладья «бьёт» 15 полей, поэтому для чёрной ладьи ($a_2$) остаётся $64 - 15 = 49$ возможных полей. По правилу произведения общее количество способов поставить белую и чёрную ладьи равно $64 \times 49 = 3136$.

**Ответ:** 3136.

Теперь, сформулируем правило произведения для нескольких объектов.

**Правило произведения.** Если объект $a_1$ можно выбрать $n_1$ способами и после каждого выбора объекта $a_1$ объект $a_2$ можно выбрать $n_2$ способами и т. д., после каждого выбора объектов $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ объект $a_p$ можно выбрать $n_p$ способами, то выбор совокупности объектов $(a_1, a_2, \dots a_p)$ именно в таком порядке можно осуществить $n_1 n_2 \dots n_p$ способами.

Правило произведения для нескольких объектов можно получить из правила произведения для двух объектов, применяя метод математической индукции[2].

**Пример 4.** Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов золотую, серебряную и бронзовую медали?

[1] Множество оставшихся после исключения дежурного учеников зависит от выбранного дежурного. Но количество оставшихся учеников всегда равно 9, и правило произведения справедливо.

[2] Метод математической индукции описан в задании 5 для 9-х классов «Элементы логики. Элементы теории множеств» или в [2].

**Решение.** Выбрать золотого медалиста (объект $a_1$) можно 20-ю способами. После этого выбрать серебряного медалиста (объект $a_2$) среди оставшихся участников можно 19-ю способами. После розыгрыша золотой и серебряной медали выбрать бронзового медалиста (объект $a_3$) можно 18-ю способами. Из правила произведения получаем, что количество способов разыграть между спортсменами золотую, серебряную и бронзовую медали равно $20 \times 19 \times 18 = 6840$.

**Ответ:** 6840.

## §2. Размещения и перестановки

**Определение.** Всякий выбор упорядоченных $k$ элементов[3] из множества, состоящего из $n$ элементов, называется *размещением из $n$ элементов по $k$ элементов.* Количество размещений из $n$ элементов по $k$ обозначается через $A_n^k$. Символ $A_n^k$ читается, как «а из $n$ по $k$» или «число размещений из $n$ по $k$».

**Определение.** Размещение из $n$ элементов по $n$ называется *перестановкой из $n$ элементов*. Количество перестановок из $n$ элементов обозначается через $P_n$.

Буквы $A$ и $P$ происходят от французских слов «Arrangement» и «Permutation», которые переводятся как «размещение, приведение в порядок» и «перестановка», соответственно.

С размещением мы уже встречались в примерах 2 и 4. В первом случае необходимо было выбрать 2 упорядоченных элемента (дежурный и заместитель) из 10 элементов (класс). Во втором случае нужно было выбрать 3 упорядоченных элемента (медали разного достоинства) из 20 элементов (спортсмены). Таким образом, было найдено, что

$$A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90, \text{ а } A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840.$$

В общем случае справедлива формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1),$$

где $1 \leq k \leq n$.

[3] Слово «упорядоченные» означает, что, выбирая $k$ элементов из $n$, мы должны строго следить за тем, в каком порядке эти элементы были выбраны. В дальнейшем мы также познакомимся с понятием «неупорядоченных $k$ элементов из множества, состоящего из $n$ элементов», где этот порядок не будет важен – будет важно лишь само множество выбранных элементов.

Доказательство этого следует непосредственно из правила произведения: на первое место можно поставить любой из $n$ элементов, на второе – любой из $(n-1)$ оставшихся и т. д. После выбора первых $(k-1)$ элементов осталось $n-(k-1)=n-k+1$ элементов, каждый из которых может быть поставлен на последнее, -е место. По правилу произведения получаем:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

**Пример 5.** Сколько существует шестизначных чисел, состоящих из ненулевых попарно различных цифр.

**Решение.** Чтобы составить такое шестизначное число, нужно из множества девяти ненулевых цифр упорядоченно выбрать шесть цифр и, выписывая эти цифры слева направо, составить это число. Таким образом, количество шестизначных чисел, состоящих из ненулевых попарно различных цифр, равняется количеству размещений из 9 элементов по 6 элементов $A_9^6$. По формуле для числа размещений, получаем:

$$A_9^6 = 9\times 8\times 7\times \dots \times (9-6+1) = 60480.$$

**Ответ:** $A_9^6 = 60480$.

Для того чтобы получить формулу для $P_n$, нужно подставить $k=n$ в формулу для числа размещений:

$$P_n = A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 2\times 1.$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$ обозначается символом «$n!$» (читается «эн факториал»):

$$n! = 1\times 2\times 3\times\dots\times(n-1)\times n.$$

Таким образом, $P_n = n!$

**Пример 6.** Сколько различных 4-буквенных слов (не обязательно осмысленных) можно составить, имея в распоряжении 4 карточки с буквами «З», «Ф», «Т», «Ш» соответственно.

**Решение.** Каждое такое слово является перестановкой из четырёх элементов («З», «Ф», «Т», «Ш»), поэтому количество слов равно количеству перестановок из четырёх элементов равно $4\times 3\times 2\times 1 = 4! = 24$.

**Ответ:** 24.

Перепишем формулу для $A_n^k$, используя символ факториала.

Если $n>k$, в формуле $A_n^k$ произведение убывающих чисел, начиная с $n$ и заканчивая $(n-k+1)$, можно домножить и разделить на произведение всех чисел от 1 до $(n-k)$, получив в числителе произведение всех чисел от 1 до $n$, то есть:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Эта формула справедлива даже при $n=k$, т. к. **принято считать по определению, что $\mathbf{0}! = \mathbf{1}$**.

## §3. Сочетания

В некоторых задачах при выборе $k$ элементов из $n$ не важен порядок их выбора – важно лишь множество выбранных элементов.

**Определение.** Всякий выбор неупорядоченных $k$ элементов из множества, состоящего из $n$ элементов, называется *сочетанием из $n$ элементов по $k$ элементов.* Количество сочетаний из $n$ элементов по $k$ обозначается через $C_n^k$.

Символ $C_n^k$ читается, как «цэ из $n$ по $k$» или «число сочетаний из $n$ по $k$». Буква $C$ происходит от французского слова «Combinaison» – «сочетание».

Неупорядоченные $k$ элементов из множества, состоящего из $n$ элементов, соответствуют -элементному подмножеству выбранных элементов исходного $n$-элементного множества. Поэтому количество сочетаний из $n$ элементов по $k$ можно трактовать как количество -элементных подмножеств $n$-элементного множества.

Прежде чем мы получим формулу для числа размещений в общем случае, выведем её в частном примере.

**Пример 7.** Сколькими способами можно разыграть среди 20 спортсменов три призовых места?

**Решение.** Этот пример очень похож на пример 4. Отличие заключается лишь в том, что здесь 3 выбранных спортсмена, занявшие призовые места, неупорядочены.

Вспомним правило произведения. Фраза «Если объект $a_1$ можно выбрать $n_1$ способами…» означает, что объекты выбираются упорядоченно, поэтому из правила произведения посчитать количество способов выбора трёх призеров из 20 участников нельзя.

Однако можно упорядочить трёх выбранных спортсменов, разыграв среди них золотую, серебряную и бронзовую медали. И, зная количество способов разыграть между 20-ю спортсменами 3 призовых места, посчитать количество способов разыграть между этими спортсменами комплект медалей.

Действительно, пусть количество способов выбрать 3 призовых места из 20 участников равно $m$. Разыграем среди этих призёров золотую, серебряную и бронзовую медали. Количество способов разыграть 3 медали среди трёх участников (количество перестановок из трёх элементов) равно 3! = 6. Заметим, что в итоге среди 20 участников были разыграны золотая, серебряная и бронзовая медали.

С одной стороны, по правилу произведения количество способов разыграть медали среди 20 участников равняется $m \times 3!$. С другой стороны, это количество уже было подсчитано ранее в примере 4, и оно равно $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Отсюда, $m = A_{20}^3/3! = (20 \times 19 \times 18)/6 = 1140$.

$$m = \frac{A_{20}^3}{3!} = 1140.$$

**Ответ:** 1140.

Для нахождения формулы $C_n^k$ в общем случае ещё раз воспользуемся приёмом, описанным в решении предыдущего примера. Рассмотрим все сочетания (неупорядоченные наборы) из $n$ элементов по $k$ элементов. Таких наборов будет $C_n^k$. Чему равняется данное число, мы пока ещё не знаем, однако если каждый набор из $k$ элементов упорядочить ($k!$ способов), то получится упорядоченный набор $k$ элементов из $n$ элементов – размещение. Таким образом, по правилу произведения получаем, что

$$C_n^k \times k! = A_n^k,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Эта формула верна в том числе для $k = 0$ и $k = n$ (напомним, $0! = 1$). Действительно, выбрать 0 элементов из $n$ ($C_n^0$) или выбрать сразу всё множество из $n$ элементов, не упорядочивая последние ($C_n^n$), можно только одним способом, т. е.

$$C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1.$$

Вид формулы $C_n^k$ и равенство $C_n^0 = C_n^n$ наталкивают на мысль, что $C_n^1 = C_n^{n-1}$, $C_n^2 = C_n^{n-2}$ и в общем случае $C_n^k = C_n^{n-k}$. Это действительно так:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Однако можно доказать, что $C_n^{n-k} = C_n^k$, не выписывая формул. Достаточно понять, что эти формулы имеют одинаковый комбинаторный смысл. Действительно, выбор множества из $k$ элементов однозначно определяет выбор оставшегося подмножества из $(n-k)$ элементов. Также в примере 7 количество способов разыграть 3 призовых места среди $20$ спортсменов равняется количеству способов отсеять $(20-3)=17$ оставшихся.

Перед решением примеров выпишем формулы для числа сочетаний при $k = 0, 1, 2, 3$ в явном виде:

$$C_n^0 = 1, \qquad C_n^1 = n, \qquad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

**Пример 8.** Какое максимальное число точек пересечения может быть у $n$ различных прямых?

**Решение.** Заметим, что каждые 2 прямые дадут не более одной точки пересечения. Если никакие 2 прямые не параллельны и никакие 3 прямые не пересекаются в одной точке, то каждым 2 прямым будут соответствовать ровно одна точка пересечения, и количество таких точек равно числу способов выбора неупорядоченной пары из двух прямых, т. е. $C_n^2$.

**Ответ:** $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

**Пример 9.** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика».

**Решение.** Пусть количество таких слов равняется $m$. Если бы все буквы были различны, то это количество равнялось бы $10!$ в соответствии с числом перестановок. Но в нашем слове буквы «т», «м» встречаются 2 раза, а буква «а» – 3 раза.

Сделаем эти буквы различными, приписав одинаковым буквам нижние индексы. Для начала трём одинаковым буквам «а» припишем разные индексы («$а_1$», «$а_2$» и «$а_3$» соответственно) – число слов теперь будет равняться $m \times 3!$. Затем сделаем «разными» буквы «т» и «м».

Теперь, в слове «$м_1а_1т_1ем_2а_2т_2ика_3$» все буквы действительно будут различны, и при перестановке букв получится $m \times 3! \times 2! \times 2! = 10!$ различных слов.

**Ответ:** $\dfrac{10!}{2!2!3!} = \dfrac{10!}{24} = 151200.$

**Пример 10.** Сколькими способами можно расселить 12 студентов в трёхместные комнаты №№1, 2, 3, 4 студенческого общежития?

**Решение.** Решим эту задачу двумя способами.

*Первый способ.*

Выберем трёх студентов для поселения в комнату №1. Количество способов такого выбора равняется $C_{12}^3$. Осталось 9 непоселённых студентов; троих из них поселим в комнату №2 $C_9^3$ способами. Ещё 3 из 6 студентов будут жить в комнате №3 $C_6^3$ способами, оставшиеся же студенты будут жить в комнате №4. По правилу произведения получаем число $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 = 369600.$

*Второй способ*:

При поселении в комнаты раздадим студентам карточки с номерами их комнат. Далее поставим студентов в ряд (например, по алфавиту) и попросим их показать свои карточки. Таким образом, количество способов расселения студентов равно количеству 12-цифренных номеров, которые можно получить из карточек «1», «2», «3», «4», по три карточки каждого вида. Аналогично примеру 9, получим ответ: $\dfrac{12!}{3!3!3!3!} = 369600.$

**Ответ:** $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 = 369600.$

Вернёмся к числам сочетаний и сформулируем их основные арифметические свойства.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, если $0 \le k \le n$;
2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \le k \le n+1$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Первое свойство уже было сформулировано и доказано ранее. К свойствам 2 и 3 мы перейдём, когда познакомимся со вторым основным правилом комбинаторики – *правилом суммы*.

## §4. Правило суммы

**Правило суммы.** Если объект $a_1$ можно выбрать $n_1$ способами, а объект $a_2$ можно выбрать $n_2$ способами, причём результаты выбора объектов $a_1$ и $a_2$ никогда не совпадают, то выбор «либо $a_1$, либо $a_2$» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

При решении следующих примеров мы воспользуемся правилами суммы и произведения, применяя также изученные «стандартные» комбинации – перестановки, размещения, сочетания.

**Пример 11.** На параллельных прямых $a$ и $b$ отмечено 11 и 12 точек соответственно. Сколько треугольников можно составить с вершинами в отмеченных точках.

**Решение.** Треугольники, составленные из отмеченных точек, разделим на два типа. К первому типу отнесём треугольники с двумя точками на прямой $a$ и одной точкой на прямой $b$. Таких треугольников $C_{11}^2 \times 12 = 660$. Ко второму типу отнесём треугольники, у которых, наоборот, две точки на прямой $b$ и одна – на прямой $a$. Треугольников второго типа $11 \times C_{12}^2 = 726$. Каждый треугольник принадлежит либо первому, либо второму типу, следовательно, количество всех треугольников равняется $660 + 726 = 1386$.

**Ответ:** $\dfrac{11\times10}{2!}\times12+11\times\dfrac{12\times11}{2!}=1386.$

**Пример 12.** Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если известно, что цифры не повторяются, и цифра 1 не находится непосредственно за цифрой 2.

**Решение.** Заметим, что удобнее вычислить количество чисел, в которых, напротив, цифры 1 и 2 стоят именно в таком порядке. В таком случае добавим вместо цифр 1 и 2 новую «цифру» «12». Перестановкой пяти получившихся карточек можно составить 5! чисел, в которых цифры 1 и 2 будут стоять рядом в таком порядке. Чтобы получить количество чисел, в которых цифра 1 не следует непосредственно за цифрой 2, надо полученное число $(5!)$ вычесть из количества всех возможных перестановок шести цифр.

**Ответ:** $6! - 5! = 96$.

**Пример 13.** Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 9, если цифры в записи числа не повторяются и в числе есть цифра 7.

**Решение.** Заметим, что мы имеем дело с упорядоченной выборкой объёма 6 из 10-элементного множества $\{0,1,2,\ldots,9\}$ с двумя дополнительными условиями: первый выбранный элемент не должен равняться нулю и среди выбранных элементов есть элемент $\{7\}$. Эти дополнительные условия не позволяют применять формулу для числа размещений сразу.

Начнём с цифры 7. Если эта цифра стоит в числе на первом месте, то останется разместить 5 цифр из 9, т. е. количество чисел, удовлетворяющих условию примера с первой цифрой 7, равно $A_9^5$ .

Если цифра 7 не стоит на первом месте, то она может стоять на одном из оставшихся 5 мест (5 способов). Далее посмотрим на первую цифру. Независимо от того, где находится цифра 7, первую цифру можно выбрать восемью способами из множества $\{1, 2, \ldots, 6, 8, 9\}$. (Ноль на первое место ставить нельзя.)

Наконец, восемь оставшихся цифр (теперь включая ноль) нужно упорядоченно поставить на 4 оставшихся места. Итого, по правилу произведения различных чисел, не начинающихся с 7, удовлетворяющих условию примера, будет $5 \times 8 \times A_8^4$.

По правилу суммы, получаем ответ.

**Ответ:** $A_9^5 + 5 \times 8 \times A_8^4 = 82320$.

**Пример 14.** Найти количество прямоугольников размера $1 \times n$, состоящего из $n$ клеток, некоторые из которых закрашены в чёрный цвет.

**Решение.** Заметим, что каждая клетка может быть закрашенной или незакрашенной, т. е. цвет этой клетки может быть выбран двумя способами независимо от «раскраски» остальной части прямоугольника. Таким образом, по правилу произведения, общее количество всех прямоугольников равняется $2^n$.

**Ответ:** $2^n$.

Теперь сформулируем предыдущую задачу на языке множеств.

**Пример 15.** Найти число подмножеств множества $A$, состоящего из $n$ элементов.

**Решение.** Сопоставим каждому подмножеству $X$ множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_3\}$ прямоугольник $1 \times n$ из $n$ клеток, так что $k$-я клетка прямоугольника будет закрашенной, если $a_k \in X$, и незакрашенной в противном случае (если $a_k \notin X$). Например, пустому подмножеству будет соответствовать полностью незакрашенный прямоугольник. Ясно, что каждому подмножеству однозначно соответствует прямоугольник, но верно и обратное – каждый прямоугольник однозначно определяет подмножество $X$. Таким образом, число всех подмножеств $n$-элементного множества $A$ равняется также $2^n$.

**Ответ:** $2^n$.

## §5. Треугольник Паскаля

Вернёмся к арифметическим свойствам чисел сочетаний и докажем свойство 2 (см. стр. 10): $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \le k \le n+1$.

Действительно,

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\left((n-k)+(k+1)\right)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Это свойство можно доказать также из комбинаторных соображений. Пусть у нас есть $n+1$ белых шариков, из которых надо выбрать $k+1$. Это можно сделать $C_{n+1}^{k+1}$ способами. Теперь покрасим один из шариков в чёрный цвет. Среди выбранных шариков либо есть шарик чёрного цвета, либо его нет.

Выбрать $k+1$ шарик, среди которых есть чёрный – значит выбрать чёрный шарик и оставшиеся $k$ белых шариков из $n$, т. е. $C_n^k$. Выбрать $k+1$ шарик, среди которых нет чёрного шарика – значит выбрать $k+1$ шарик только из множества белых шариков, которых $n$ штук, т. е. $C_n^{k+1}$. По правилу суммы получаем, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

Свойство 2 позволяет нам расположить все числа $C_n^k$ в виде бесконечной таблицы, которая называется треугольником Паскаля:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
0: & & & & & & C_0^0 & & & & & \\
1: & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
2: & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
3: & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
4: & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
5: & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 & ⋰ & & & & & & & & & & ⋱
\end{array}
$$

или, численно:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
0: & & & & & & 1 & & & & & \\
1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & ⋰ & & & & & & & & & & ⋱
\end{array}
$$

Т. к. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, то в треугольнике Паскаля *каждое число (кроме крайних) равно сумме двух чисел, стоящих непосредственно выше данного числа*. Так, например, число 6 из строки 4 равняется сумме двух троек, непосредственно стоящих над ним, т. к. $C_4^2 = C_3^1 + C_3^2$. Можно сказать, что крайние числа, равные единицам, тоже удовлетворяют этому свойству, т. к. непосредственно выше них находится только одна единица.

Теперь перейдём к свойству 3 (стр. 10): $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$. Это свойство можно записать короче, используя знак математической суммы:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$$

Данная запись означает, что мы должны выписать все слагаемые вида $C_n^i$, где $i$ принимает целые значения от нуля ($i = 0$ под знаком суммы) до $n$ (над знаком суммы), само же $n$ во всех выписанных слагаемых остаётся постоянным. Затем все выписанные слагаемые нужно сложить.

Приведём три способа доказательства свойства 3.

Первый способ основан на использовании треугольника Паскаля. Положим,

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

Всякое $C_{n-1}^k$ из строки $(n-1)$ входит в стоку $n$ в качестве слагаемого два раза – в $C_n^k$ и $C_n^{k+1}$. Следовательно, $S_n = 2S_{n-1} = 2^2 S_{n-2} = \cdots = 2^n S_0 = 2^n$, т. к. $S_0 = 1$.

Второй способ доказательства – комбинаторный. Вернёмся к примеру 15 в конце §4.

При решении данного примера с помощью применения правила произведения был получен ответ: $2^n$. Решим теперь данный пример, применив правило суммы.

**Пример 15.** Найти число подмножеств множества $A$, состоящего из $n$ элементов.

**Решение.** Заметим, что все подмножества -элементного множества можно разбить на $(n+1)$ группу по количеству элементов в данном подмножестве (от 0 до $n$).

Рассмотрим одну из таких групп, которая содержит все подмножества из $k$ элементов. Количество подмножеств из $k$ элементов равно числу неупорядоченных наборов (сочетаний) из $n$ по $k$, т. е. $C_n^k$.

Таким образом, по правилу суммы, получаем:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Третий способ доказательства основывается на применении бинома Ньютона.

## §6. Бином Ньютона

На разворотах многих школьных учебников по алгебре за 7 класс написаны следующие формулы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Обобщим эту формулу для более высоких степеней:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n.$$

Эта формула и называется «биномом Ньютона». Докажем её.

**Доказательство.** Если перемножить, не приводя подобные члены, $n$ скобок $(a+b)$, то получится сумма из слагаемых вида $a^{n-k}b^k$, $k =$

$= 0, 1, \dots, n$. Заметим, что для данного $k$ слагаемое вида $a^{n-k}b^k$ получается только в том случае, если при перемножении из каких-то $k$ скобок мы возьмём множитель $b$, а в оставшихся $(n-k)$ скобках – множитель $a$. Таким образом, число слагаемых такого вида будет равно количеству способов выбрать неупорядоченно $k$ скобок из $n$, т. е. $C_n^k$. Это число и есть множитель перед выражением $a^{n-k}b^k$, ч. т. д.

Хотя бином и носит имя Ньютона, он был известен уже в средние века, задолго до Ньютона. Самим же биномом называется выражение $a+b$. Так же стоит отметить, что числа $C_n^k$ часто называют «*биномиальнальными коэффициентами*».

**Замечание.** Биномиальные коэффициенты формулы $(a+b)^n$ целиком составляют $n$-ю строку треугольника Паскаля. Поэтому для вычисления $(a+b)^n$ вместо вычисления каждого коэффициента по отдельности бывает значительно проще построчно выписать весь треугольник Паскаля до строки $n$ включительно, пользуясь только тем, что каждое число в нём равно сумме двух чисел, стоящих непосредственно выше данного числа. Так, используя 5-ю строку треугольника Паскаля, получаем: $(a+b)^5 = a^n + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + b^5$.

Теперь вернёмся к третьему способу доказательства формулы $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$. Для доказательства этой формулы достаточно подставить в бином Ньютона числа $a = b = 1$:

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

**Пример 16.** Найдите наибольший коэффициент многочлена $(3+x)^8$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

**Решение.** Выпишем формулу коэффициента при $x^k$ – он равен $3^{8-k}C_8^k$. Чтобы найти, при каком $k$ этот коэффициент принимает наибольшее значение, нужно посмотреть, как ведёт себя (возрастает или убывает) этот коэффициент при увеличении $k$ на единицу. Для этого поделим коэффициент при $x^{k+1}$ на коэффициент при $x^k$:

$$\frac{3^{8-k-1}\frac{8!}{(k+1)!(8-k-1)!}}{3^{8-k}\frac{8!}{k!(8-k)!}} = \frac{(8-k)}{3(k+1)}.$$

Заметим, что

$$\frac{(8-k)}{3(k+1)} > 1, \text{если } k < 2 \text{ и}$$

$$\frac{(8-k)}{3(k+1)} < 1, \text{если } k \geq 2.$$

Таким образом, коэффициент при $x^{k+1}$ больше коэффициента при $x^k$ при $k < 2$ и меньше – при $k \geq 2$, поэтому максимум будет достигаться при $k = 2$.

**Ответ:** $3^6 C_8^2 = 20412$.

* Можно вывести формулу, аналогичную формуле бинома, позволяющую находить степени большего количества слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_s=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}.$$

В данной формуле знак $\Sigma$ означает, что мы должны выписать, а затем сложить все выражения вида $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, где $k_1, k_2 \dots k_s$ – все возможные неотрицательные целые числа, дающие в сумме $n$.

Коэффициент $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ имеет комбинаторный смысл количества слов, которые можно получить, переставляя $n$ карточек, $k_1$ из которых содержат букву $a_1$, $k_2$ – букву $a_2$ и т. д. (см. пример 9).

Выведенная формула называется *полиномиальной.* Например,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) + 6abc.$$

Рассмотрим несколько задач на применение формулы бинома Ньютона.

**Пример 17.** Найдите коэффициент при $x^{14}$ в разложении

$$(1 + x^3 + \ x^8)^{10}.$$

**Решение.** Запишем полиномиальную формулу для этого примера.

$$(1 + x^3 + x^8)^{10} = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} 1^{k_1} x^{3k_2}\, x^{8k_3}$$

Так как уравнение $3k_2 + 8k_3 = 14$ имеет только одно решение в неотрицательных числах при $k_2 = 2, k_3 = 1$. Соответственно $k_1 = 10 - 2 - 1 = 7$, и коэффициент при $x^{14}$ равен:

$$\frac{10!}{7!\,2!\,1!} = 360.$$

**Ответ:** 360. ∗

## II. Случайные события и их вероятности

**Определение.** *Случайным событием*, связанным с некоторым опытом, называется всякое событие, которое при осуществлении этого опыта либо происходит, либо не происходит.

Первый пример случайного события – «выпадение герба» при подбрасывании монеты. При честном подбрасывании монеты мы не можем до броска каким-то образом рассчитать, какой стороной упадёт монета – гербом вверх или гербом вниз. Однако после броска мы уже будем точно знать, как упала эта монета. Таким образом, «выпадение герба» при подбрасывании монеты  является случайным событием. Так же случайными событиями являются, например, выход из строя электрической лампочки или наличие снежного покрова в г. Долгопрудном 1 марта 2111 года. Никакая наука не сможет точно предугадать, не перегорит ли данная лампочка через сутки или какая погода будет через 100 лет.

Представьте себе, что вам нужно подкинуть монету и узнать, какой стороной она упала. Однако эту монету вы видите впервые, и она вам показалась «странной». Или, более того, вы вообще не знаете, что это за монета, а попросили друга по телефону кинуть монету за вас и сообщить результат. В таком случае вы ничего заранее не сможете сказать об исходе эксперимента (т. е. упадёт ли монета гербом вверх или нет). Изучать случайное событие стоит лишь тогда, когда имеется возможность повторить опыт многократно и каждый раз фиксировать, произошло это событие или нет. В таком случае говорят о *частоте* случайного события.

Пусть при $n$-кратном осуществлении опыта событие произошло $k$ раз. Тогда $k/n$ даст частоту этого события.

Французский естествоиспытатель Биффон, изучая случайные события, провёл опыт с подбрасыванием монет 4040 раз. Герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частота выпадения герба –

$$\frac{2048}{4040} = 0,507 \approx 0,5.$$

Эксперименты с подбрасыванием монет проводились многократно и каждый раз частота выпадения герба оказывалась близка к 0,5 Если говорить строже, частота этого события должна «стремиться» к 0,5 при увеличении числа подбрасываний[4]. Это явление называют статистической устойчивостью частоты события. Эксперименты показывают, что свойством статистической устойчивости обладают многие случайные события, представляющие интерес для практики. События, обладающие свойством статистической устойчивости, изучаются в особом разделе математики – *теории вероятностей*.

Возьмём игральную кость и подбросим её 500 раз. Под случайным событием будем понимать «выпадение единицы». При проведении этого опыта автором единица выпала 79 раз, т. е. частота события получилась равной 0,158. Это число уже не близко к 0,5, однако по свойству статистической устойчивости, частота выпадения должна быть близка к какому-то числу.

В данном случае это число можно найти из «физических соображений» – существуют ровно 6 различных исходов броска игральной кости («1» – «6») и, если кость однородная и симметричная, нет поводов предпочитать один исход другому. Исходы назовём равновероятными с вероятностью каждого исхода, равной 1/6. Это число уже близко к частоте 0,158, полученной при подбрасывании игральной кости 500 раз.

Но почему такие «физические соображения» приемлемы? Почему игральная кость однородная и симметричная? Почему исходы должны быть равновероятными? Ответ на этот вопрос схож с ответом на вопрос «Почему при решении физических задач Землю считают шаром или, вообще, материальной точкой». Мы строим некую модель, и при построе-

[4] См. задание 3 для 10-х классов «Последовательности. Предел последовательности. Предел функции. Исследование функций. Построение графиков с нахождением пределов».

нии этой модели некоторые свойства мы идеализируем, а некоторыми свойствами – пренебрегаем. Полученный результат будет отвечать реальности с точностью до погрешности этой модели. Самая обычная игральная кость, конечно, не будет полностью симметричной и однородной, но частота выпадения единицы на ней будет также близка к 1/6.

Таким образом, построим некую модель: пусть в опыте возможны $n$ равновероятных исходов $u_1, u_2, \dots, u_n$ (их ещё называют элементами события). Тогда вероятность каждого исхода принимается равной $1/n$. Записывают это следующим образом:

$$P(u_1) = \frac{1}{n}, \qquad P(u_2) = \frac{1}{n}, \qquad \dots, \qquad P(u_n) = \frac{1}{n}.$$

Первая из формул читается, как «вероятность $u_1$ равна $1/n$». Буква $P$ происходит от английского слова «Probability», что означает вероятность.

Теперь определим вероятность более сложного события. Рассмотрим опыт с $n$ равновероятными исходами, в которых событие происходит тогда и только тогда, когда опыт оканчивается какими-то $k$ исходами и не происходит в том случае, если имеет место один из $(n-k)$ оставшихся эпизодов. Будем говорить, что исходы, приводящие к событию $A$, благоприятствуют ему.

**Определение.** Вероятностью события $A$, связанного с опытом с $n$ равновероятными исходами, называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию $A$, к числу всех исходов, т. е.

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

где $k$ – количество исходов, благоприятствующих событию $A$.

Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \le P(A) \le 1$, что следует из условия $0 \le k \le n$.

Заметим, что вероятность события согласно определению выше будет (с некоторой точностью) отвечать частоте случайного события при многократном повторении опыта. Это будет верно, если многократным повторением события установлено (с некоторой точностью), что элементы события действительно равновероятны.

Разберём определение вероятности случайного события на конкретных примерах.

**Пример 18.** Найдите вероятность следующих событий при броске игральной кости:

$A_1$ – выпадение нечётного числа,

$A_2$ – выпадение числа, делящегося на 3,

$A_3$ – выпадение числа 7.

**Решение.** Во-первых, найдём элементы события. Это будут выпадения чисел от 1 до 6: $n = 6$.

Числа, благоприятствующие первому событию – 1, 3, 5, т. е. $P(A_1) =$ $= 3/6$.

Числа, благоприятствующие второму событию –3, 6, т. е. $P(A_2) =$ $= 2/6$.

Число 7 на игральной кости выпасть не может (его там нет), т. е. чисел, благоприятствующих событию $A_3$ – нет, $P(A_3) = 0/6 = 0$.

**Ответ:** $P(A_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A_2) = \frac{1}{3}; \quad P(A_3) = 0.$

**Пример 19:** Наугад были нажаты 5 клавиш на русской клавиатуре (33 буквы). Какова вероятность того, что было напечатано слово «ФЗФТШ»?

**Решение.** Элементами события здесь будут все 5-буквенные (не обязательно осмысленные) слова. Количество этих 5-буквенных слов по правилу произведения будет равняться $33^5$.

Благоприятствующий исход будет только один – слово «ФЗФТШ», таким образом, искомая вероятность равна $1/33^5$.

**Ответ:** $1/33^5 \approx 2{,}6 \times 10^{-8}$.

**Пример 20.** Из колоды в 36 карт выбирают наугад 4 карты. Какова вероятность того, что среди этих карт есть хотя бы один туз?

**Решение.** Элементами события будут все сочетания из четырёх карт – их $C_{36}^4$.

Благоприятными исходами будут все сочетания, в которых есть хотя бы один туз. Количество таких исходов вычислим, отняв от количества всех исходов количество неблагоприятных исходов – т. е. сочетаний, в которых тузов нет. Количество последних равно $C_{32}^4$, т. к. для того, чтобы в вытащенных 4-х картах тузов не было, нужно заранее убрать эти четыре туза из колоды, и среди оставшихся 32-х карт выбрать четыре.

**Ответ**: $\dfrac{C_{36}^{4}-C_{32}^{4}}{C_{36}^{4}}\approx 0,4.$

**Пример 21.** В урне лежат 60 белых и 4 чёрных шарика. Из неё наудачу вынимается 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них будут ровно 2 белых шарика.

**Решение.** Элементами события будут все сочетания 5 шариков из 64 шариков – их будет $C_{64}^{5}$.

Благоприятный исход – это пятёрка вытащенных шариков, среди которых ровно 2 белых и ровно 3 чёрных. Чтобы найти количество благоприятных исходов, сначала возьмём 2 белых шарика из 60, затем 3 черных из 4-х. Количество способов взять 2 белых шарика из 60 равно $C_{60}^{2}$. Количество способов взять 3 чёрных шарика из 4-х равно $C_4^3$. По правилу произведения, общее количество благоприятных исходов равно $C_{60}^{2}\times C_4^3$.

**Ответ:** $(C_{60}^{2}\times C_4^3)/C_{64}^{5}\approx 9{,}3\times 10^{-4}$.

## Литература

1. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994.
2. *Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х.* Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. /под ред. *Г.Н .Яковлева* – М.: Наука, 1988.

## Контрольные вопросы

**1(2).** С помощью правила произведения найдите, сколько 5-буквенных слов (не обязательно осмысленных) можно составить из 8 карточек с буквами «А», «Б», «В», «Г», «Д», «Е», «Ж», «З».

**2(2).** 20 футбольных команд сыграли в однокруговой турнир (каждая команда сыграла с каждой по одному разу). Пользуясь формулой количества сочетаний, найдите, сколько всего игр было проведено между командами?

**3(2).** На параллельных прямых $a$ и $b$ отмечено 11 и 12 точек соответственно. Сколько четырёхугольников можно составить с вершинами в отмеченных точках? (См. пример 11.)

**4(2).** Сколько существуют пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра? (См. пример 12.)

**5(2).** Пользуясь биномом Ньютона, найдите, чему равен коэффициент при $x^6y^{2005}$ в выражении $(y-x)^{2011}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

**6(2).** Воспользовавшись свойством 2 числа сочетаний, найдите $n$ и $k$ в выражении $C_n^k = C_{2011}^4 + 3C_{2011}^5 + 3C_{2011}^6 + C_{2011}^7$.

**7(2).** Из урны, содержащей 5 белых, 6 синих и 7 красных шариков выбирается наугад 1 шарик. Какая вероятность того, что он окажется:
а) белым б) синим в) жёлтым?

## Задачи

**1(3).** Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове «словообразование».

**2(3).** Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове «словообразование», чтобы две буквы «а» не шли подряд.

**3(3).** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску слона и ферзя так, чтобы они не били друг друга.

**4(4).** Сколько различных трёхзначных чисел можно написать, используя цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если при записи числа каждая цифра может использоваться не более одного раза?

**5(4).** На холодильнике прикреплены 33 магнитика в виде букв русского алфавита (по одной каждая). Обезьяна взяла 6 из них и выложила в ряд. Какая вероятность того, что было выложено слово «МОСКВА»?

**6*(8).** Сколькими способами можно положить 5 одинаковых тетрадей в 10 разных ящиков.

**7*(8).** Сколькими способами можно положить 10 одинаковых тетрадей в 5 разных ящиков, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна тетрадь.

**8*(8).** Что более вероятно – получить при бросании 4-х костей хотя бы одну шестёрку, или при 24-х бросаниях пар костей – хотя бы один раз две шестёрки?

**9(6).** Докажите, что сумма $C_{2011}^{0} + 2C_{2011}^{1} + 4C_{2011}^{2} + \cdots + 2^{2011}C_{2011}^{2011}$ делится на 81.

**10(7).** Докажите тождество $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = 2^{n-1}n$.

**11(4).** Найдите наибольший коэффициент многочлена $(2+3x)^{40}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

**12*(7).** Найдите коэффициент при $\frac{1}{\sqrt{x}}$ в разложении $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + x^2\right)^{10}$.