Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Стереометрия

Задание №5 для 10-х классов

(2010 – 2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2011

Составитель: А.С. Кочерова, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 10-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2011, 19с.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Кочерова Анна Сергеевна
Подписано 14.01.11. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,18.
Уч.-изд. л. 1,05. Тираж 1400. Заказ №5-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9,
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение**
тел/факс (498) 744-63-51 – **очно-заочноеотделение**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2011

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

1. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Напомним основные *определения*.

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

При решении многих задач по стереометрии часто используются следующие теоремы.

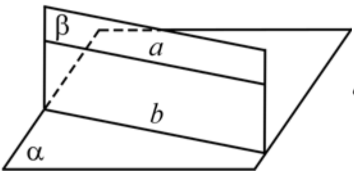


Рис. 1

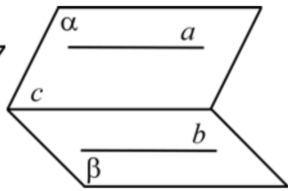


Рис. 2

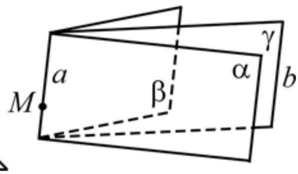


Рис. 3

Теорема 1. (Теорема о линии пересечения). Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения *плоскостей* параллельна данной прямой.

□ Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \parallel \alpha$ (рис. 1). Тогда прямые a и b лежат в плоскости β, причём $a \cap b = \varnothing$ (иначе точка их пересечения лежала бы в плоскости α, что противоречит параллельности прямой a и плоскости α). Следовательно, $a \parallel b$. ■

Теорема 2. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

□ Пусть $a \parallel b$, где $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, причём $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2). Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$.

Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. Далее по теореме о линии пересечения получим $c \parallel a$. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$. ■

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

Теорема 3. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

□ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a, а прямая b параллельна α и β. Возьмём на прямой a точку M и проведём плоскость γ через b и M (рис. 3). Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a_1, а плоскость β – по прямой a_2. По теореме о линии пересечения $a_1 \parallel b$ и $a_2 \parallel b$. Но прямые a_1 и a_2 имеют общую точку M, следовательно, это одна и та же прямая – прямая a. Итак, $a \parallel b$. ■

Пример 1. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

□ Пусть a скрещивается с b. Возьмём на прямой a точку A и проведём через неё прямую b', параллельную прямой b (в плоскости, проходящей через A и b). Через a и построенную прямую проведём плоскость α. Аналогично строим плоскость β (рис. 4). По признаку параллельности плоскостей α || β. ■

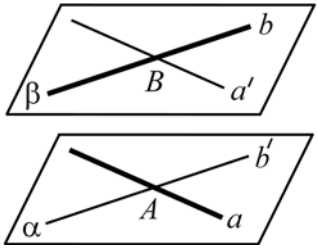


Рис. 4

2. Об изображении фигур в стереометрии

В стереометрии используется плоский чертёж или *изображение* – любая фигура, подобная параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость. Поскольку грани многогранников – многоугольники, лежащие в различных плоскостях, для начала изучим, как изображаются многоугольники.

Справедливо следующее утверждение: <u>изображением данного треугольника может служить любой треугольник</u>. Для изображения многоугольника выделяют в нём три вершины A_1, A_2, A_3. Затем строят изображение треугольника $A_1A_2A_3$ в виде произвольного треугольника. Изображения остальных вершин многоугольника строятся уже однозначно согласно свойствам параллельного проектирования.

Пример 2. Постройте изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$.

□ Пусть O – центр шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 5). Треугольник ABO изображается произвольным треугольником $A'B'O'$. Так как при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в па-

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

раллельные, то точка C переходит в точку пересечения прямых, параллельных AO и AB, проходящих через B и O соответственно. А точки оригинала, симметричные относительно точки O, переходят в точки изображения, симметричные относительно O'. Таким образом получаем точки C', D', E', F'. ■

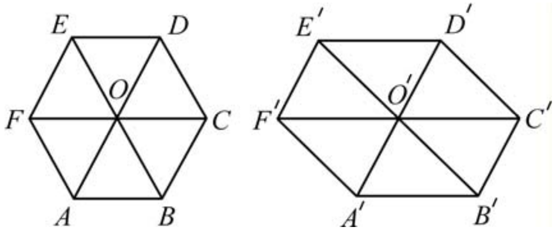
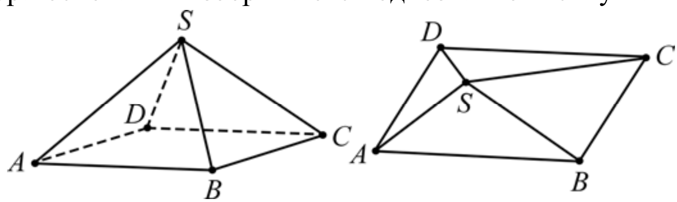


Рис. 5

Справедливо следующее утверждение: изображением данного тетраэдра может служить любой четырёхугольник с проведёнными в нём диагоналями (не обязательно выпуклый). Для изображения многогранника выделяют в нём четыре вершины A_1, A_2, A_3, A_4. Затем строят изображение тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в виде произвольного четырёхугольника с проведёнными в нём диагоналями. Изображения остальных вершин многогранника строятся уже однозначно.

Пример 3. Постройте изображение правильной четырёхугольной пирамиды.

□ Изобразим сначала три ребра, выходящие из одной вершины основания, например, из A (см. рис. 6). Это можно сделать произвольно. Далее, два других ребра основания изображаются однозначно в силу параллельности уже построенным отрезкам. Остается только соединить изображение вершины пирамиды с изображениями вершин основания. ■



а) **Рис. 6** б)

3. Сечения многогранников

Определение. Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется *сечением* многогранника указанной плоскостью.

Мы будем заниматься решением следующей задачи: на данном изображении многогранника построить изображение его сечения данной плоскостью. По сложившейся традиции пишут «построить сечение многогранника», опуская слово «изображение». Способ задания секущей плоскости может быть разным: например, тремя точками, не лежащими на одной прямой, двумя точками и условием параллельности некоторой прямой, одной точкой и условием параллельности некоторой плоскости, и т. п.

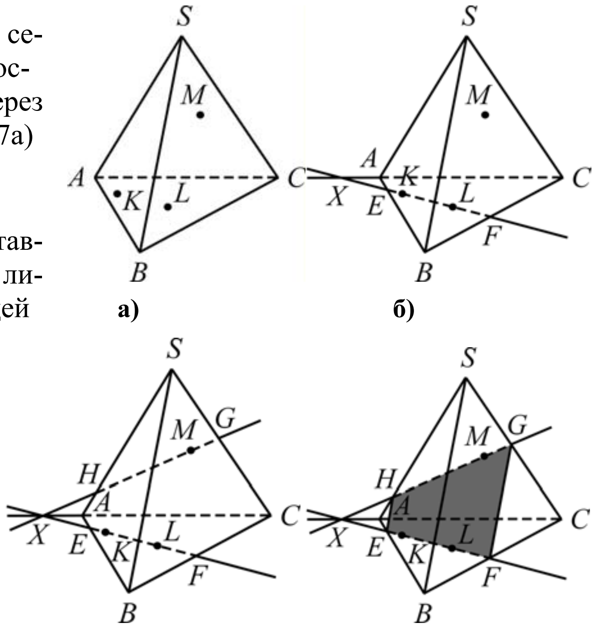
Сначала рассмотрим самый простой случай:

1) секущая плоскость задана тремя точками, две из которых лежат в плоскости одной грани многогранника, а третья – в плоскости грани, смежной с первой.

Пример 4. Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M (рис. 7а)

$K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, $M \in (ASC)$).

□ Для решения поставленной задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями пирамиды. Предположим, что плоскость KLM (которую мы обозначим α) построена. Так как плоскости α и ABC имеют общую точку K, то они пересекаются по прямой, проходящей через K (согласно аксиоме пересечения плоскостей), а так как эти плоскости имеют ещё одну общую



а) **б)** **в)** **г)**

Рис. 7

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

точку – точку L, то прямая KL является линией пересечения плоскостей α и ABC. Отсюда вытекает следующее построение: проведём прямую KL до пересечения с отрезками AB и BC в точках E и F (рис. 7*б*). Пусть эта прямая пересечёт прямую AC в точке X. Будем рассуждать аналогично: точки X и M лежат как в плоскости α, так и в плоскости ASC, следовательно, прямая XM – их линия пересечения, поэтому строим прямую XM до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G (рис. 7*в*). Повторяя рассуждения по той же схеме, делаем вывод, что плоскости α и ASB пересекаются по прямой EH, а плоскости α и BSC – по прямой FG. Поэтому для завершения построения остаётся соединить точку E с точкой H и точку F с точкой G (рис. 7*г*). Единственность решения вытекает из аксиомы плоскости. ■

Проведённое построение было основано на нахождении линий пересечения секущей плоскости с плоскостями граней многогранника – так называемых *следов* секущей плоскости на плоскостях граней. Отсюда и происходит название метода построения сечений, который мы сейчас использовали, – *метод следов*.

В случае, если прямые KL и AC окажутся параллельными, нужно воспользоваться теоремами о параллельности в пространстве. Эти же теоремы применяются и в случае, если одним из условий задачи является параллельность некоторой прямой, некоторой плоскости или двум скрещивающимся прямым.

Пример 5. Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α, проходящей через точку K, лежащую на SS_1 ($S_1 \in (ABC)$) внутри $SABC$, параллельно скрещивающимся рёбрам AB и SC (рис. 8*а*).

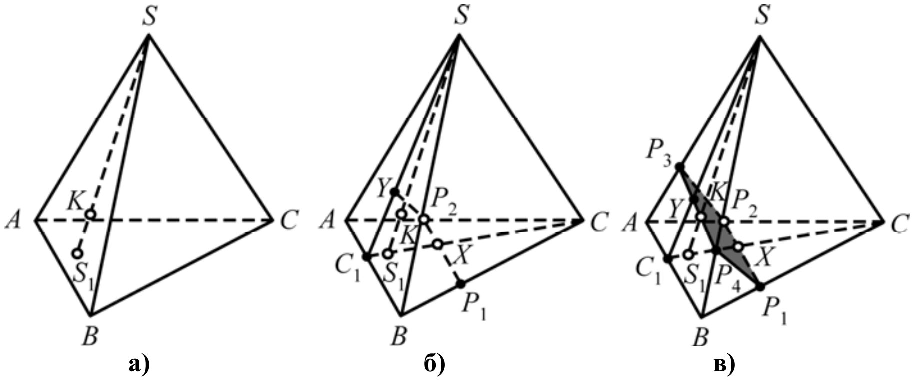


Рис. 8

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

□ Построим плоскость SC_1C. На этой плоскости строим прямую KX – след секущей плоскости α. Так как SC параллельна α, то линия пересечения KX плоскостей α и SCS_1 параллельна прямой SC.

Пусть $CS_1 \cap AB = C_1$, $C_1S \cap KX = Y$. Так как AB параллельна α, то линия пересечения плоскостей α и ABC параллельна прямой AB. Поэтому, проводим через X прямую $P_1P_2 \parallel AB$, где P_1 – точка пересечения этой прямой с BC, а P_2 – точка пересечения с AC. Аналогично, через Y проводим прямую $P_3P_4 \parallel AB$, где P_3 – точка пересечения этой прямой с BS, а P_4 – точка пересечения с AS. Следовательно, $P_1P_2P_3P_4$ – искомое сечение. ■

4. Применение проектирования при построении сечений

Теперь рассмотрим более сложные ситуации, когда нет двух точек в плоскости одной грани многогранника, принадлежащих также и сечению.

Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (*плоскость проектирования*) и прямая l (*направление проектирования*), пересекающая α. Возьмём в пространстве произвольную точку M и проведём через неё прямую m, параллельную l (если M лежит на l, то в качестве m берётся сама прямая l) (рис. 9). Точка пересечения M_1 прямой m с плоскостью α называется *параллельной проекцией* точки M на эту плоскость.

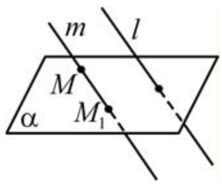
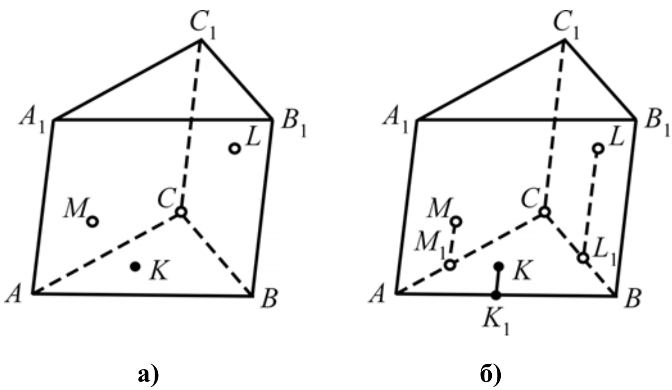
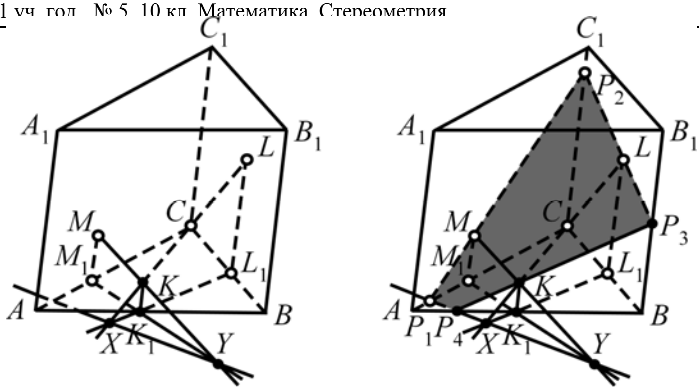


Рис. 9



а) **б)**

Рис. 10



в) **Рис. 10** г)

Пример 6. Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью KLM (рис. 10*а*), где $K \in (AA_1B)$, $L \in (BB_1C)$, $M \in (AA_1C)$.

□ Точки *K, L* и *M* находятся по одной на каждой из боковых граней призмы. Проблема заключается в нахождении следа плоскости *KLM* на плоскости *ABC* (мы предполагаем, что эти плоскости пересекаются). Для того, чтобы построить этот след, воспользуемся параллельным проектированием. Пусть точки K_1, L_1 и M_1 – проекции точек *K, L* и *M* на плоскость *ABC* в направлении бокового ребра призмы, а *X* и *Y* – точки пересечения прямых *KL* и K_1L_1, *KM* и K_1M_1 соответственно (рис. 10*б*). Так как $(KLM) \cap (ABC)$, то из трёх пар прямых, *KL* и K_1L_1, *KM* и K_1M_1, *LM* и L_1M_1, есть по крайней мере две пары пересекающихся прямых (докажите это самостоятельно). Пусть это будут пары *KL*, K_1L_1 и *KM*, K_1M_1. Тогда прямая *XY* – искомый след (рис. 10*в*). Действительно, точка *X* лежит на прямой *KL,* следовательно, она принадлежит плоскости сечения. Но эта же точка лежит и в плоскости *ABC,* так как она находится на прямой K_1L_1. Следовательно, точка *X* принадлежит линии пересечения плоскостей *KLM* и *ABC.* Аналогичный вывод делаем и относительно точки *Y.* Теперь, после того как нужный след построен, дальнейшее построение без труда проводится методом следов (рис. 10 г).

В случае когда плоскости *KLM* и *ABC* параллельны, достаточно через точки *K, L* и *M* провести прямые, параллельные прямым *AB, BC* и *CA*. Искомое сечение тем самым будет построено. ■

Параллельное проектирование удобно использовать при построении сечений призм (в частности, параллелепипедов и кубов). При этом, как

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

правило, в качестве плоскости проектирования выбирают плоскость основания призмы, а за направление проектирования принимают направление бокового ребра призмы.

При построении сечений пирамид удобно пользоваться центральным проектированием.

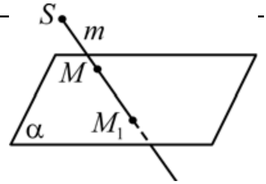


Рис. 11

Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (*плоскость проектирования*) и не принадлежащая ей точка S (*центр проектирования*). *Центральной проекцией* точки M на плоскость α называется точка M_1 пересечения прямой SM с плоскостью α, если она существует (рис. 11).

За плоскость проектирования принимается плоскость основания, а в качестве центра проектирования берут вершину пирамиды. Приведём соответствующий пример.

Пример 7. Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью KLM, где $K \in (ASB)$, $L \in (BSC)$, $M \in (CSA)$ (рис. 12*а*).

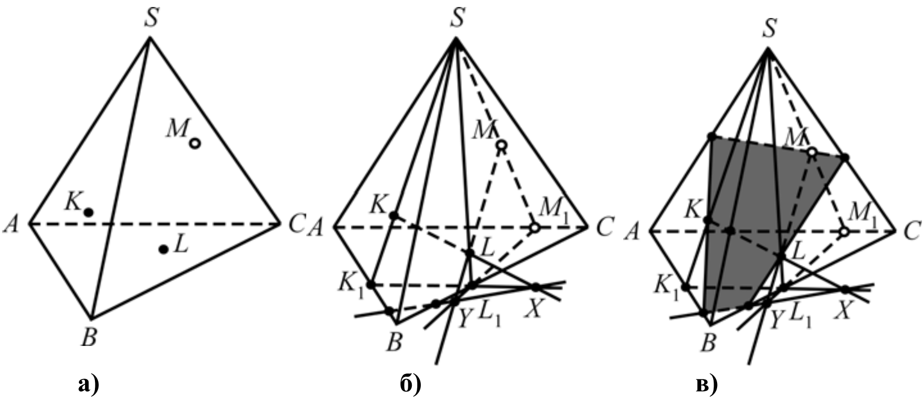


Рис. 12

□ Построим центральные проекции точек K, L и M на плоскость ABC. Пусть это будут точки K_1, L_1 и M_1 (рис. 12*б*). Построим точки пересечения прямых KL и K_1L_1 (точка X), LM и L_1M_1 (точка Y). Тогда аналогично тому, как это было сделано в примере 5, доказываем, что прямая XY – линия пересечения секущей плоскости и плоскости основания пирамиды. Дальнейшее построение показано на рис. 12*в*. ■

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

5. Примеры решения задач на сечения многогранников

Здесь мы разберём решения некоторых задач, связанных с определением вида сечения, вычислением периметров, площадей сечений, отношений, в которых секущая плоскость делит рёбра многогранника и т. п. При этом, чтобы не загромождать изложение, мы подробно не будем описывать само построение сечения, тем не менее, когда вы будете решать подобные задачи, не забывайте аккуратно обосновать построение сечения (даже если в условии задачи не сказано «построить сечение»).

Пример 8. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Точки P, Q и R взяты на медианах SP_1, SQ_1 и SR_1 граней SAB, SBC и SCA соответственно так, что $SP : PP_1 = 2 : 1$, $SQ : QQ_1 = 2 : 3$, а R – середина отрезка SR_1. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро SB.

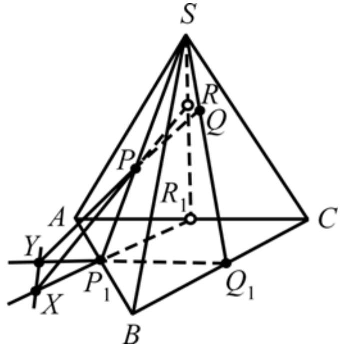


Рис. 13

□ Сначала построим след секущей плоскости на плоскости основания пирамиды, соединив прямой точки X и Y пересечения прямых PR, P_1R_1 и PQ, P_1Q_1 (рис. 13). Уточним теперь положение точек X и Y, найдя отношения $XP_1 : XR_1$ и $YP_1 : YQ_1$.

Для их вычисления воспользуемся известной из планиметрии теоремой Менелая. Согласно этой теореме, применённой к треугольнику SP_1R_1 (рис. 14), $\frac{R_1R}{RS}\cdot\frac{SP}{PP_1}\cdot\frac{P_1X}{XR_1}=1$, следовательно, $1\cdot\frac{R_1X}{XP_1}\cdot\frac{1}{2}=1$, откуда $\frac{XP_1}{XR_1}=\frac{1}{2}$.

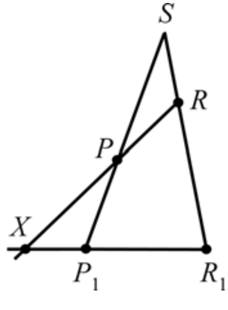


Рис. 14

Аналогично из треугольника SP_1Q_1 нахо-

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

дим, что $\dfrac{YP_1}{YQ_1}=\dfrac{1}{3}.$

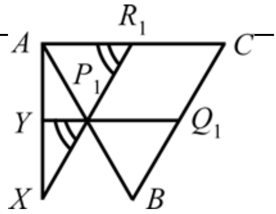


Рис. 15

Обратимся теперь к рис. 15. Так как $\dfrac{YP_1}{YQ_1}=\dfrac{1}{3}$,

то $\dfrac{YP_1}{P_1Q_1}=\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{YP_1}{AR_1}=\dfrac{1}{2}$ (так как $P_1Q_1=AR_1$),

а раз $\dfrac{XP_1}{XR_1}=\dfrac{1}{2}$ и $\angle YP_1X=\angle AR_1X$, то $\Delta YP_1X\sim\Delta AR_1X$, следовательно, точки X, Y и A лежат на одной прямой (причём Y – середина отрезка AX). Теперь уже легко достроить сечение (рис. 16).

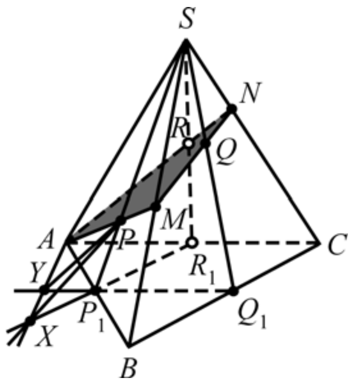


Рис. 16

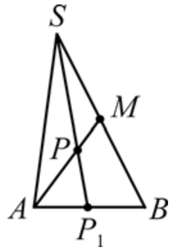


Рис. 17

Чтобы найти $SM : MB$ (M – точка пересечения AP и SB), обратимся к рис. 17. Как известно из планиметрии, точка P, делящая медиану SP_1 в отношении $2:1$, считая от вершины S, является точкой пересечения медиан треугольника ASB. Поэтому AM – медиана этого треугольника и $SM : MB = 1 : 1$. ■

Замечание. При решении этой задачи мы использовали **теорему Менелая**, напомним без доказательства, в чём она заключается.

Если на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC или их продолжениях взяты три точки A_1, B_1, C_1, то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Отметим, что в данной задаче можно было бы найти отношение $XP : XR_1$ (см. рис. 14) и без теоремы Менелая. Например, провести прямую $RK \parallel XR_1$ (см. рис. 19). Тогда из подобия треугольников SKR и SP_1R_1 следует, что $SK : SP_1 = 1 : 2$. Следовательно, $KP : PP_1 = 1 : 2$ и $KR : XP_1 = KR : P_1R_1 = 1 : 2$. Значит, $XP_1 = P_1R_1$, и $XP_1 : XR_1 = 1 : 2$. Аналогично находится отношение $YP_1 : YQ_1$.

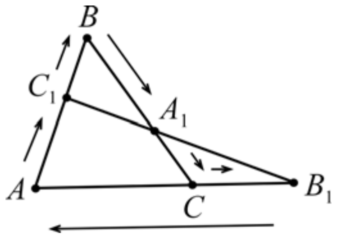


Рис. 18

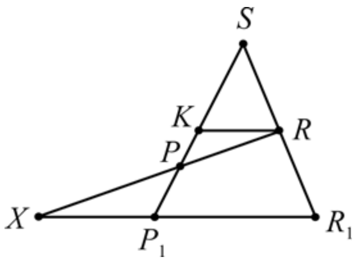


Рис. 19

6. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Напомним основные определения.

Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Две плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°. (Угол между плоскостями – это наименьшая из величин двугранных углов, образованных при их пересечении.)

Перечислим основные теоремы, которые используются при решении задач.

Теорема 4. (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 5. (теорема о трёх перпендикулярах). Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

Теорема 6. (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

Пример 9. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD, а ребро AD перпендикулярно ребру BC. Докажите, что

$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2.$$

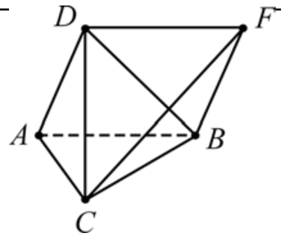


Рис. 20

□ Достроим Δ BAD до параллелограмма $BADF$ (рис. 20). Из перпендикулярности прямых AB и CD следует, что $\angle CDF = 90°$, т. е. $CF^2 = CD^2 + DF^2$. Аналогично, $CF^2 = CB^2 + BF^2$, следовательно, $CD^2 + DF^2 = CB^2 + BF^2$. Но $DF = AB$, а $BF = AD$, поэтому $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. ■

Пример 10. Рёбра AB и CD, AD и BC тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что рёбра AC и BD также перпендикулярны.

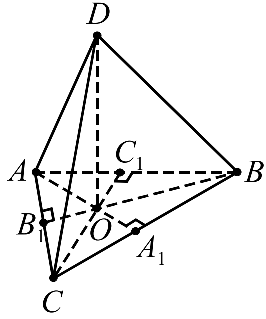


Рис. 21

□ Опустим из точки D перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 21). По теореме о трёх перпендикулярах из того, что $CD \perp AB$ следует, что $CO \perp AB$, т. е. точка O лежит на прямой, содержащей высоту CC_1 треугольника ABC. Аналогично, точка O лежит на прямой, содержащей высоту AA_1, и, значит, O – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Следовательно, $BO \perp AC$ и по теореме о трёх перпендикулярах, $BD \perp AC$ ■

Пример 11. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ имеют длину 2. Точки M и N – середины рёбер AS и AB соответственно. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой CN, и найти площадь этого сечения.

□ Обозначим секущую плоскость через α и предположим, что искомое сечение построено. Так как $\alpha \perp (CN)$, то прямая CN перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α, в частности линии пересечения плоскостей α и ABC. Кроме того, плоскость α должна содержать перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC (этот перпендикуляр параллелен высоте SO пирамиды). Действительно, если точка M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

плоскость ABC, а точка L – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую CN, то по теореме о трёх перпендикулярах $(ML)\perp(CN)$. А так как $(M_1L)\perp(CN)$, то $(MM_1L)\perp(CN)$. Но через точку M проходит единственная плоскость, перпендикулярная прямой CN, поэтому α и (MM_1L) – одна и та же плоскость.

Отсюда вытекает следующее построение (рис. 22). Сначала строим изображение центра основания пирамиды – точку O пересечения диагоналей AC и BD основания, затем строим отрезок SO – изображение высоты пирамиды. После этого через точку M проводим прямую, параллельную прямой SO, до пересечения с отрезком AC в точке M_1. Тем самым мы построим изображение перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC. Остается построить изображение перпендикуляра к прямой CN, проходящего через точку M_1. Пусть этот перпендикуляр пересекает прямую CN в точке L. Уточним положение точки L вычислением, обратившись к рис. 23. По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 4 + 1 = 5$, т. е. $CN = \sqrt{5}$. Пусть $K = (CN) \cap (BD)$. Так как K – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $CK = \frac{2}{3}CN = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. Заметим, что M_1 – середина $[OA]$, поскольку M – середина $[AS]$, а $(MM_1) \parallel (SO)$. Следовательно, $CM_1 = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Теперь из подобия прямоугольных треугольников CLM_1 и COK получаем, что $CL = \frac{CM_1}{CK}\cdot OC = \frac{9\sqrt{5}}{10}$, т. е. $\frac{CL}{CN} = \frac{9}{10}$. Тем самым положение точки L определено. Для того, чтобы её построить, достаточно отложить на $[CN]$ от точки N отрезок NL длины $\frac{1}{10}CN$ (задача деления отрезка на

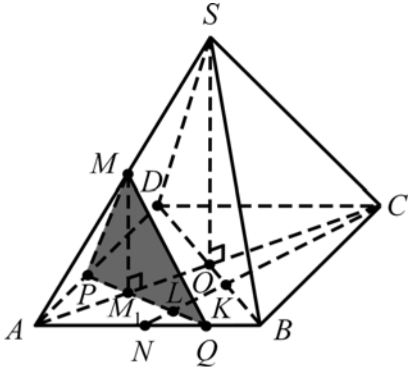


Рис. 22

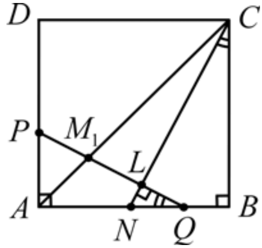


Рис. 23

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

равные части известна из планиметрии и решается с помощью теоремы Фалеса). Пусть теперь $(M_1L) \cap (AB) = Q$, $(M_1L) \cap (AD) = P$. Заметим, что $Q \in [AB]$, а $P \in [AD]$. Действительно, из подобия треугольников LNQ и BNC (рис. 23) следует, что $NQ = \dfrac{LN \cdot CN}{NB} = \dfrac{\frac{1}{10}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{1} = \dfrac{1}{2}$.

Поэтому $NQ < NB$, значит, $Q \in [AB]$. Из подобия треугольников APQ и BNC следует, что $AP = \dfrac{AQ \cdot NB}{BC} = \dfrac{(AN + NQ)\cdot NB}{BC} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1}{2} = \dfrac{3}{4}$, поэтому $P \in [AD]$. Соединив точки P и Q с точкой M, получаем искомое сечение (рис. 22).

Действительно, по построению $(MM_1) \perp (ABC)$, а $(CN) \subset (ABC)$, следовательно $(MM_1) \perp (CN)$. Опять-таки по построению $(PQ) \perp (CN)$, следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp (CN)$.

Вычислим площадь сечения. Имеем $S_{MPQ} = \dfrac{1}{2} MM_1 \cdot PQ = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}SO\right)\cdot PQ$. Длину высоты пирамиды находим из прямоугольного треугольника ASO : $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4 - 2 = 2$, т. е. $SO = \sqrt{2}$. Длину отрезка PQ находим из прямоугольного треугольника APQ: $PQ^2 = AP^2 + AQ^2 = \dfrac{9}{16} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{45}{16}$, т. е. $PQ = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. Итак, $S_{MPQ} = \dfrac{3\sqrt{10}}{16}$. ■

Пример 12. Доказать, что плоскость α сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящая через середины P, Q, R рёбер A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, перпендикулярна диагонали BD_1 и проходит через её середину.

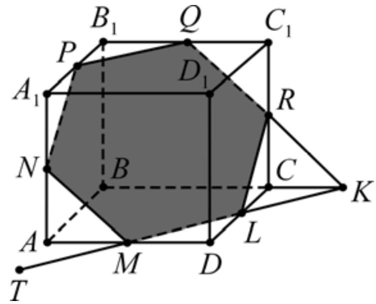


Рис. 24

□ Средняя линия PQ треугольника $A_1B_1C_1$ параллельна основанию A_1C_1, т. е. $A_1C_1 || \alpha$ (рис. 24). Аналогично, $C_1D || RL$, т. е. $C_1D || \alpha$. Итак, плоскость α параллельна пересекающимся прямым A_1C_1

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

и C_1D плоскости A_1C_1D, поэтому $\alpha \parallel (A_1C_1D)$. Отсюда следует, что $\alpha \perp BD_1$.

Пусть O – точка пересечения BD_1 с плоскостью α. Тогда $PO \perp BD_1$, т. е. PO – высота в равнобедренном треугольнике BPD_1, и, значит, PO – его медиана, а O – середина BD_1. ■

Контрольные вопросы

1(1). Сколько различных пар параллельных плоскостей можно провести через данные скрещивающиеся прямые?

2(1). На рис. 25 даны изображения середин двух сторон (точки M и N) и центра (точка O) некоторого квадрата. Как построить изображение всего квадрата?

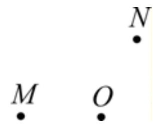


Рис. 25

3. а)(1) Доказать, что сечение куба плоскостью, проходящей через его центр, является либо параллелограммом, либо шестиугольником с попарно параллельными и равными сторонами;

б)(2) Может ли отношение длин главных диагоналей этого шестиугольника быть равным 1,3?

4(3). Может ли

а) проекция;

б) сечение

куба быть семиугольником?

5(1). Верно ли, что если две плоскости перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой?

6(1). Докажите, что диагональ AC_1 и диагональ DA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны.

7(2). Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

8(3). Из любой ли точки пространства можно провести прямую, пересекающую обе данные скрещивающиеся прямые?

9*(6). При каких n сечением правильной n-угольной пирамиды может быть правильный $(n+1)$ – угольник?

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

Задачи

1(2). Скрещивающиеся рёбра тетраэдра имеют длину a и b. Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной этим рёбрам, является ромбом. Найти длину стороны ромба.

2(2). Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной ребру AC и проходящей через точки P и Q на рёбрах AB и CD такие, что $BP:PA = CQ:QD = 1:2$.

3(3). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. На рёбрах A_1D_1 и BC взяты точки K и M так, что $A_1K = \frac{1}{5}a$, $CM = \frac{2}{5}a$. Найдите периметр сечения куба плоскостью, проходящей через точки K и M параллельно прямой C_1D.

4(3). Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $AC = a$, $BD = b$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно c. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину K ребра SC параллельно прямой BD, и найдите площадь этого сечения.

5* (4). В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S на отрезке AD взяты три точки, делящие его на четыре равные части. Через эти точки проведены сечения, параллельные плоскости SAB. Найдите отношения площадей указанных сечений.

6(2). Точки K и L – середины рёбер AA_1 и B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точка M делит ребро CD в отношении $2:1$, считая от вершины C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью KLM, и найти в каком отношении оно делит рёбра параллелепипеда.

7(3). Три диагонали параллелепипеда попарно перпендикулярны, а их длины равны a, b и c. Найдите длину четвёртой диагонали.

8(3). Проекцией куба является правильный шестиугольник со стороной a. Найдите длину ребра куба.

9* (4). Приведите пример тетраэдра, у которого высоты (высотой тетраэдра называется прямая, проходящая через его вершину перпен-

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна

дикулярно противоположной грани) не пересекаются в одной точке. Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда две пары его противоположных рёбер перпендикулярны.

10(3). В тетраэдре $ABCD$ плоские углы ADB, BDC, CDA прямые. Докажите, что ортогональной проекцией вершины D на плоскость ABC является точка пересечения высот треугольника ABC.

11* (4). На ребре DB тетраэдра $ABCD$ выбрали точки E и F так, что $DE : EF : FB = 1 : 1 : 2$. Сечения тетраэдра двумя параллельными плоскостями, проходящими через точки E и F, имеют площади 5 и 16 соответственно, причём первое из этих сечений – треугольник, одна из вершин которого делит ребро DA в отношении $2 : 1$, считая от вершины D. Найти:

а) в каком отношении ребро AB делится второй плоскостью,

б) сечение тетраэдра этими плоскостями.

© 2010, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель: Кочерова Анна Сергеевна