

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)**

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть II)

Задание №4 для 9-х классов
(2010 – 2011 учебный год)



г. Долгопрудный, 2010

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 9-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2010, 23с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 15 января 2011 г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и требуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

Пиголкина Татьяна Сергеевна

Подписано 03.12.10. Формат 60x90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,44.

Уч.-изд. л. 1,28. Тираж 1500. Заказ №4-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9,
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение**
тел/факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2010

Вторая часть по планиметрии содержит три параграфа. В § 1 подробно обсуждаются свойства касательных, хорд и секущих, доказывается теорема “о касательной и секущей”. § 2 посвящён вписанным и описанным четырёхугольникам, теме, которая практически не рассматривается в учебнике. В § 3 рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Этой теме, к сожалению, в школе также мало уделяется внимания, хотя именно в задачах на построение лучше всего усваивается и закрепляется теоретический материал.

В решениях задач § 2 будут применяться теоремы косинусов и синусов, более подробно эти теоремы будут обсуждаться в задании “Планиметрия”, часть III в 10 классе ФЗТШ. Здесь мы только напомним эти теоремы. Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены a , b , c , а величины противолежащих углов α , β , γ , справедливы две теоремы, утверждения которых можно кратко записать так:

теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Напомним также, что в учебнике доказано, что

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN , точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\Delta AOM = \Delta AON$. Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO$. Таким образом, если из точки к окружности проведены две касательные, то:

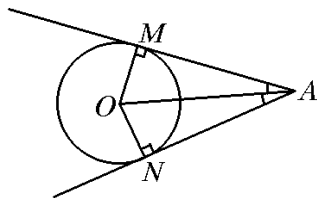


Рис. 1

1°. отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;

2°. прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.

Используя свойство 1, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность.)

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D , при этом $DA = a$, $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC , касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN .

▷ Пусть $a > b$. Обозначим $x = MN$, $y = ND$, $z = BM$.

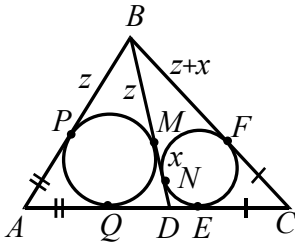


Рис. 2

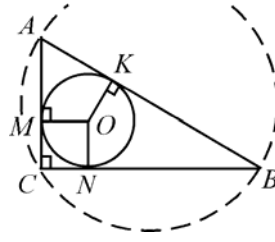


Рис. 3

По свойству касательных $DE = y$, $QD = x + y$, $AQ = AP = a - (x + y)$, $CE = CF = b - y$, $BP = z$ и $BF = z + x$. Выразим боковые стороны: $AB = z + a - x - y$, $BC = z + x + b - y$. По условию $AB = BC$, поэтому $z + a - x - y = z + x + b - y$. Отсюда находим $x = (a - b)/2$. Итак, $MN = (a - b)/2$. Если $a < b$, то $MN = (b - a)/2$. Итак, $MN = \frac{1}{2}|a - b|$. ◁

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т. е. $a + b = 2R + 2r$.

▷ Пусть M , N и K – точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC = b$, $BC = a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Вспомним, что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R$. Далее, $OM \perp AC$, $BC \perp AC$, значит, $OM \parallel BC$, аналогично $ON \perp BC$,

$AC \perp BC$, значит, $ON \parallel AC$. Четырёхугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r , поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r$.

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN$, поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т. к. $AB = 2R$, то получаем $a + b = 2R + 2r$.

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами.

▷ Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 4). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α . Соединим точки A и B с центром окружности. Так как $OA \perp AN$, $OA = OB$, то

$\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \alpha$. Сумма углов треугольника равна 180° , поэтому $\angle AOB = 2\alpha$.

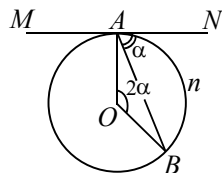


Рис. 4

Таким образом, градусная мера угла BAN между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB , которая заключена между его сторонами. (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAV .) ◁

Задача 3. Точка C лежит на окружности и отстоит от касательных, проведённых из точки M к окружности, на расстоянии $CS = a$ и $CP = b$ (рис. 5). Доказать, что $CK = \sqrt{ab}$. (Это утверждение называется лемма Адамара).

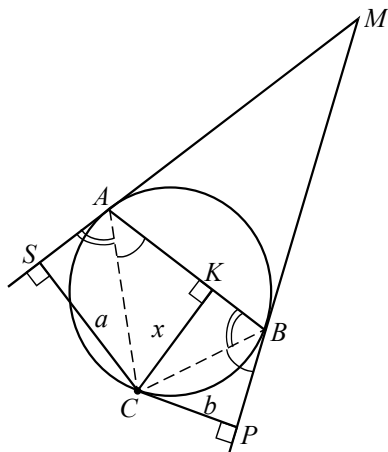


Рис. 5

▷ Проведём хорды CA и CB . Угол SAC между касательной SA хордой AC равен вписанному углу ABC . А угол PBC между касательной PB и хордой BC равен вписанному углу BAC .

Получили две пары подобных прямоугольных треугольников $\triangle ASC \square \triangle BKC$ и $\triangle BPC \square \triangle AKC$. Из подобия имеем $\frac{a}{AC} = \frac{x}{BC}$ и $\frac{b}{BC} = \frac{x}{AC}$, откуда следует $ab = x^2$, $x = \sqrt{ab}$. (Если проекция точки C на прямую AB лежит вне отрезка AB , доказательство изменяется не сильно). (Ч. т. д.) \triangleleft

Докажем теорему, обычно называемую “теоремой о касательной и секущей”.

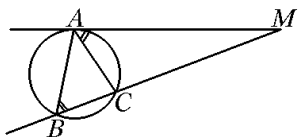


Рис. 6

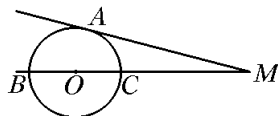


Рис. 7

Теорема 2. Пусть из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB , пересекающая окружность в точке C (рис. 6). Тогда справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т. е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек её пересечения с окружностью.

\triangleright Проведём хорду AC . Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC , оба измеряются половиной градусной меры дуги AC . В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA , а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA/MB = MC/MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. \triangleleft

Задача 4. Радиус окружности равен r . Из точки M проведены касательная MA и секущая MB , проходящая через центр окружности (рис. 7). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

\triangleright Обозначим искомое расстояние x : $x = MO$, тогда $MB = x + r$, $MC = x - r$ и по условию $MA = MB/2 = (x + r)/2$. По теореме о касательной и секущей $(x + r)^2/4 = (x + r)(x - r)$, откуда, сокращая на $(x + r)$, получаем $(x + r)/4 = (x - r)$. Легко находим $x = 5r/3$. \triangleleft

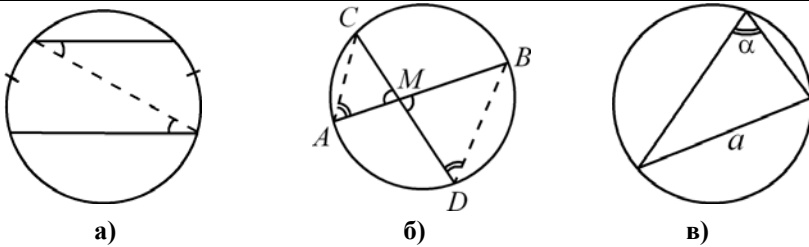


Рис. 8

Напомним также следующие свойства хорд окружности:

1°. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Обратное: диаметр, проходящей через середину хорды (не являющуюся диаметром) перпендикулярен ей.

2°. Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратное: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.

3°. Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны (см. рис. 8 а).

4°. Если две хорды AB и CD пересекаются в точке M , то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, т. е. произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды (см. рис. 8 б).

5°. В окружности радиуса R длина хорды a и величина α вписанного угла, опирающегося на эту хорду, связаны соотношением $a = 2R \cdot \sin \alpha$.

Задача 5. В окружности проведены три равные хорды $AB = BC = CD = a$. Хорды AB и CD пересекаются в точке K , угол $BKC = 120^\circ$ (рис. 9). Найти радиус окружности.

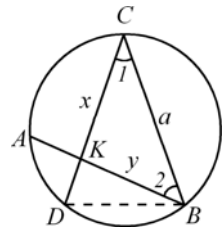


Рис. 9

▷ Обозначим $CK = x$, $BK = y$, тогда $AK = a - y$, $DK = a - x$. По свойству 4° имеем: $CK \cdot DK = AK \cdot BK$, т. е. $x(a - x) = y(a - y)$. Это равенство преобразуем к виду $(x - y)(a - x - y) = 0$. Так как $a \neq x + y$ (в противном случае треугольник BKC не существует), то $x = y$. Следовательно, треугольник BKC – равнобедренный и $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$. Из теоремы синусов следует, что $R = BK / 2 \sin(\angle 1)$. BD найдём из $\triangle BCD$ по теореме косинусов:

$$BD = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 30^\circ} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Таким образом, $R = BD / 2 \sin 30^\circ = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. <

Используем свойство пересекающихся хорд для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC , тогда $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$, т. е. если $AB = c$, $AC = b$, $BD = x$, $DC = y$, то $AD^2 = bc - xy$ (рис. 10а).

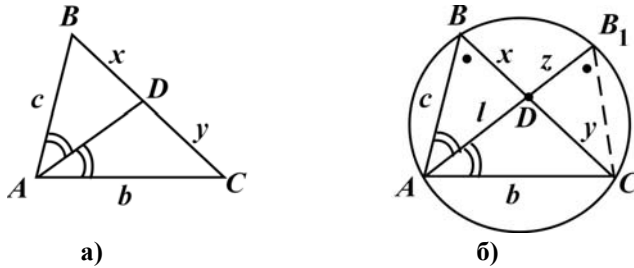


Рис. 10

□ Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 10б) и точку пересечения продолжения биссектрисы AD с окружностью обозначим B_1 . Обозначим $AD = l$ и $DB_1 = z$. Вписанные углы ABC и AB_1C равны, AD – биссектриса угла A , поэтому $\square ABD \sim \square AB_1C$ (по двум углам).

Из подобия имеем $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB_1}$, т. е. $\frac{l}{b} = \frac{c}{l+z}$, откуда $l^2 = bc - lz$.

По свойству пересекающихся хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DB_1$, т. е. $xy = lz$, поэтому получаем $l^2 = bc - xy$. ■

Напомним, что в задании 1 доказано свойство биссектрисы треугольника:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \text{ т. е. } \frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

В заключении параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются касающимися внутренне (рис. 11а), а если

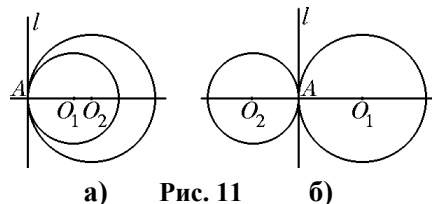


Рис. 11

расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 11б).

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l$, $AO_2 \perp l$ следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров*.

Задача 6. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A . Через точку B , лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 12). Найти AB , если $BC = a$.

▷ Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB$, то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т. к. радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2$.

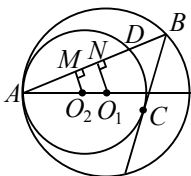


Рис. 12

По теореме о касательной и секущей имеем:

$$BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2 \left(1 - \frac{AD}{AB}\right),$$

т. е. $a^2 = AB^2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)$.

Итак, $AB = a \sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_2}}$. ◁

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 13). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C . Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

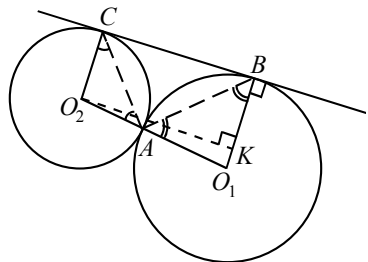


Рис. 13

▷ Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C . По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \parallel O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180^\circ$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle CO_2A$,

то $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 90^\circ$, и поэтому радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , равен половине гипотенузы BC .

Найдём BC . Пусть $O_2K \perp O_1B$, тогда $KO_2 = BC$, $O_1K = R_1 - R_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. \triangleleft

§ 2. Вписанные и описанные четырёхугольники

Четырёхугольник называется *вписанным* в окружность, если окружность проходит через все его вершины.

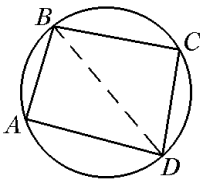


Рис. 14

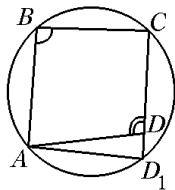
Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 14). Вписанные углы A и C опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, следовательно, $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Аналогично, $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Итак, если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна 180° .

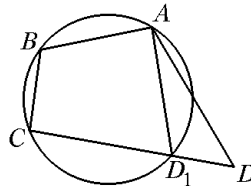
Верно и обратное: если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около этого четырёхугольника можно описать окружность. Докажем это.

\triangleright Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Проведём через вершины A , B и C окружность. Требуется показать, что четвёртая вершина D не может лежать ни внутри, ни вне этой окружности.

Допустим, что точка D лежит внутри окружности (рис. 15а). Продолжим сторону CD до пересечения с окружностью, получим точку D_1 . Четырёхугольник $ABCD_1$ вписан в окружность, следовательно, $\angle B + \angle D_1 = 180^\circ$. По условию $\angle B + \angle D = 180^\circ$, поэтому $\angle D = \angle D_1$.



а)



б)

Рис. 15

Но $\angle D$ – внешний угол для треугольника ADD_1 , внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного. Значит, предположение неверно, точка D не может лежать внутри окружности. Совершенно аналогично доказывается, что точка D не может лежать и вне окружности (рис. 15б). Следовательно, точка D должна лежать на окружности. \triangleleft

1. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм есть прямоугольник.

Действительно, если $ABCD$ – параллелограмм, то его противоположные углы равны: $\angle A = \angle C$. Если этот параллелограмм вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$, значит, $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Аналогично $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $ABCD$ – прямоугольник. Обратное утверждение очевидно.

2. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Это следует из того, что сумма углов трапеции (рис. 16), прилежащих к боковой стороне, равна 180° (как сумма внутренних односторонних при параллельных прямых): $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Около нее можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180° : $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Отсюда следует, что равны вписанные углы, опирающиеся на боковые стороны, и, следовательно, равны и сами стороны.

Задача 8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 3 (рис. 17). Сторона AD является диаметром окружности, $CD = 4$. Стороны AB и BC равны. Найти эти стороны.

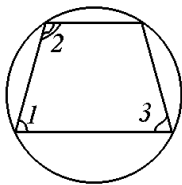


Рис. 16

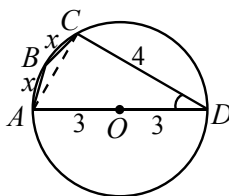


Рис. 17

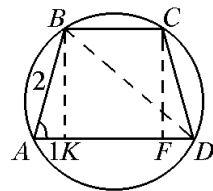


Рис. 18

\triangleright Неизвестные стороны обозначим x , угол ADC обозначим φ . Четырёхугольник вписан в окружность, значит, $\angle B = 180^\circ - \varphi$. Проведём диагональ AC . Угол ACD опирается на диаметр, он прямой. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\cos \varphi = 2/3$,

$AC = AD \sin \varphi = AD \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 2\sqrt{5}$. Из треугольника ABC по теореме косинусов будем иметь

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(180^\circ - \varphi),$$

откуда, учитывая, что $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, получим $20 = 2x^2 + 2x^2 \cos \varphi$. Подставляем сюда значение $\cos \varphi = 2/3$ и находим $x = \sqrt{6}$. \triangleleft

Задача 9. Основания равнобокой трапеции равны 1 и 3, боковые стороны равны 2 (рис. 18). Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

\triangleright Трапеция равнобокая. Если $BK \perp AD$ и $CF \perp AD$, то по свойству трапеции $AK = FD = (AD - BC)/2 = 1$. В прямоугольном треугольнике ABK гипотенуза AB в два раза больше катета AK , следовательно, $\angle ABK = 30^\circ$ и $\angle BAK = 60^\circ$. Около равнобокой трапеции можно описать окружность. Эта окружность описана и около треугольника ABD . Радиус R этой окружности выражается через угол и противоположную сторону по формуле $R = a/2 \sin A$. Найдём $a = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ} = \sqrt{7}$. Следовательно,

$$R = a/2 \sin A = \sqrt{7}/3. \triangleleft$$

Четырёхугольник называется *описанным* около окружности, если окружность касается всех его сторон.

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 19). Точки касания окружностью сторон четырёхугольника обозначим M, N, P, Q . По свойству касательных: $AM = AN$, $BP = NB$, $MD = QD$, $PC = CQ$. Складывая эти равенства, получим: $AM + MD + BP + PC = AN + NB + CQ + QD$, что означает $AD + BC = AB + CD$. Итак, **если четырёхугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.**

Докажем, что справедливо и такое утверждение: **если в выпуклом четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.**

\triangleright Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AD + BC = AB + CD$. Если докажем, что существует единственная точка, равноудалённая от всех сторон четырёхугольника, то эта точка, очевидно, будет центром окружности, касающейся всех сторон четырёхугольника. Положим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. По условию

$a + c = b + d$, что равносильно $c - b = d - a$. Пусть $d > a$. Отложим на большей стороне CD меньшую сторону $DM = a$ (рис. 20). Так

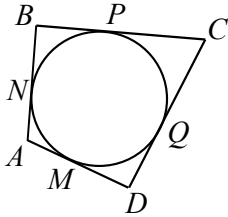


Рис. 19

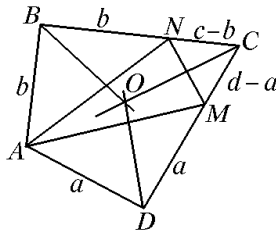


Рис. 20

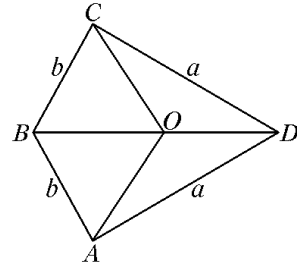


Рис. 21

как в этом случае $c > b$, то также отложим $BN = b$. Получим три равнобедренных треугольника ABN , ADM , MCN .

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, отсюда следует, что если провести биссектрисы углов B , C , D четырёхугольника, то они разделят пополам соответственно отрезки AN , AM , MN и будут им перпендикулярны. Это означает, что эти биссектрисы будут серединными перпендикулярами трёх сторон треугольника AMN , а они по теореме пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от сторон AB и BC (лежит на OB), CD и AD (лежит на OD) и BC и CD (лежит на OC), следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырёх сторон четырёхугольника $ABCD$.

Если $d = a$, то $c = b$ (рис. 21), биссектрисы углов B и D лежат на одной прямой (перпендикулярны AC и проходят через середину AC), и четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD . Пусть биссектриса угла C пересекает BD в точке O , тогда (в силу симметрии) AO – биссектриса угла A , и, следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырёх сторон, и в этот четырёхугольник можно вписать окружность ч. т. д. \triangleleft

Задача 10. Равнобокая трапеция с основаниями a и b ($a > b$) описана около окружности. Найти 1) радиус окружности и 2) косинус угла при большем основании.

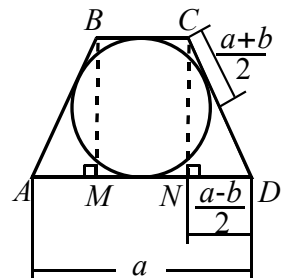


Рис. 22

▷ Пусть в равнобокой трапеции $ABCD$ $BC = b$, $AD = a$ (рис. 22). Эта трапеция равнобокая, $AB = CD$; она описана около окружности, следовательно, $AB + CD = AD + BC$. Отсюда получаем: $AB = CD = (a + b)/2$. Проведём BM и CN перпендикулярно AD . Трапеция равнобокая, углы при основании равны, следовательно, равны и треугольники ABM и DCN и $AM = ND$. По построению $MBCN$ – прямоугольник, $MN = BC = b$, поэтому $AM = (AD - BC)/2 = (a - b)/2$. Из прямоугольного треугольника ABM находим

$$\cos A = \frac{AM}{AB} = \frac{a - b}{a + b} \quad \text{и}$$

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{ab}/2$. ◁

§ 3. Задачи на построение

Задачи на построение рассматривались в задании № 2 для 8 класса. Однако некоторые учащиеся поступили в ФЗФТШ только в этом году, поэтому уделим этой теме внимание ещё раз, остановимся также на методе геометрических мест, методе подобия и методе симметрии.

В задачах на построение требуется построить некоторую геометрическую фигуру, используя только линейку и циркуль. С помощью линейки можно проводить прямую (но нельзя с её помощью откладывать отрезки или, пользуясь двумя краями, проводить параллельные прямые), с помощью циркуля можно на данной прямой отложить любой данный отрезок, а также проводить окружности любого радиуса.

Главное в задачах на построение – это найти и описать последовательность действий (осуществляемых с помощью циркуля и линейки), ведущих к построению нужной фигуры, доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи, выяснить, всегда ли построение можно осуществить, сколько существует решений, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается, усложняется или делается невозможным.

При решении задач, как составные шаги решения, будем использовать основные построения, считая их известными (повторите по учебнику):

Построение 1: построение треугольника по трём сторонам.

Построение 2: построение угла, равного данному, от полупрямой в данную полуплоскость.

Построение 3: построение биссектрисы угла.

Построение 4: деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка).

Построение 5: построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

Построение 6: построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Как правило, решение задач на построение начинают с анализа задачи. Предполагают задачу решённой и делают от руки примерный чертёж искомой фигуры. По чертежу, используя данные задачи, пытаются установить, к нахождению какой точки (прямой, окружности) сводится решение задачи. При этом часто приходится проводить дополнительные построения. Иногда это делается наудачу, не зная заранее, принесёт ли такое построение пользу или нет. Удача и простота решения зависят главным образом от навыка решения таких задач, от знания методов решения задач на построение. Рассмотрим пример задачи на построение.

Задача 12. Дан отрезок m и острый угол α . Построить прямоугольный треугольник с углом α , у которого сумма катетов равна m .

▷ Анализ. Предположим, что задача решена, построен прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle A = \alpha$ и $AC + BC = m$ (рис. 23).

На прямой AC отложим отрезок CD , равный катету BC , тогда

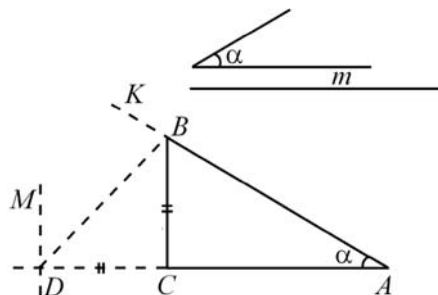


Рис. 23

$AD = m$, а треугольник BCD – прямоугольный равнобедренный, и $\angle BDC = 45^\circ$. Мы

получили треугольник ABD , в котором известна сторона AD и два прилежащих к ней угла – такой треугольник можно построить.

Построение. Шаг 1. На прямой l откладываем отрезок $AD = m$ и строим угол DAK , равный данному углу α (построение 2).

Шаг 2. Через точку D проводим перпендикуляр DM к прямой DA (построение 5).

Шаг 3. Проводим биссектрису прямого угла MDC (построение 3), получаем точку B на луче AK .

Шаг 4. Через точку B проводим перпендикуляр к прямой AD (построение 5), получаем точку C . Треугольник ABC – искомый.

Действительно, $\angle BAC = \alpha$, а из $BC \perp AD$ и $\angle BDC = 45^\circ$ следует, что $AC + BC = AC + CD = m$. Построение возможно всегда, треугольник ADB , а следовательно, и треугольник ABC определяются единственным образом. \triangleleft

Замечание. В этой задаче была задана сумма двух сторон треугольника, и мы как бы “развернули” эти стороны так, что они легли на одну прямую, – получили отрезок AD . Этот приём называется методом спрямления и обычно применяется в задачах, условия которых содержат сумму или разность сторон треугольника (четырёхугольника).

Обратите внимание, что в решении задач на построение можно выделить 4 обязательных этапа: анализ, в котором намечается план построения, само построение, доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям и, наконец, исследование возможности построения. Анализ опускают в простых задачах или тех, решение которых уже известно.

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест. Особенно удобен этот метод, когда требуется построить точку (или точки), удовлетворяющие нескольким условиям. При решении задач часто используется знание следующих геометрических мест:

а) геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии a от точки A , есть окружность радиуса a с центром в точке A ;

б) геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B , есть серединный перпендикуляр отрезка AB ;

в) геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от прямой l , есть две прямые, параллельные l ;

г) геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой AB в точке C , есть перпендикуляр к AB в точке C (за исключением точки C);

д) геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой AB , есть окружность с диаметром AB , за исключением точек A и B .

Проиллюстрируем указанный метод на следующей задаче.

Задача 13. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой l в точке B .

▷ Анализ. Так как окружность должна касаться прямой l в точке B (рис. 24), то её центр O должен принадлежать перпендикуляру BD к прямой l .

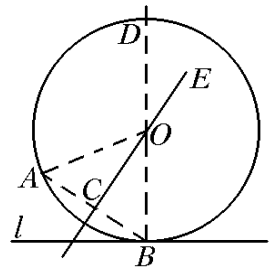


Рис. 24

Кроме того, окружность должна проходить через точки A и B , следовательно, её центр должен быть одинаково удалён от этих точек, т. е. лежать на серединном перпендикуляре CE к отрезку AB . Поэтому искомый центр, находясь одновременно на прямых BD и CE , является точкой их пересечения.

Построение – проведение этих прямых (построения 4 и 5).

Доказательство. $CE \perp AB$, $AC = CB$, $\triangle COB = \triangle COA$ (по двум катетам), следовательно, $OA = OB$. Точка B лежит на окружности и $OB \perp l$, следовательно, l – касательная в точке B .

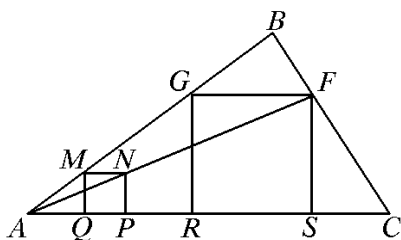
Исследование. Задача имеет решение и притом единственное, если прямые BD и CE пересекаются, не параллельны, т.е. если точка A не

лежит на прямой l . \triangleleft

Метод подобия. Во многих задачах бывает удобно строить сначала не саму искомую фигуру, а ей подобную. В этом случае данные для построения разбиваются на две группы: одни используются для построения подобных фигур (подобных фигур существует бесконечно много), а другие служат для того, чтобы от этих фигур перейти к искомой. Метод подобия часто применяется при вписывании одних фигур в другие.

Задача 14. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы одна сторона квадрата лежала на стороне треугольника, а две вершины лежали на других сторонах треугольника.

▷ Ослабим задачу. Построим квадрат, у которого одна сторона



лежит на стороне треугольника и одна вершина лежит на другой стороне треугольника. Эта задача проще и имеет много решений.

Возьмём, например, на стороне AB некоторую точку M (рис. 25) и опустим перпендикуляр MQ на AC .

Далее строим квадрат $MNPQ$ (по

Рис. 25

строение 5 и 6). Для построения искомого квадрата надо квадрат $MNPQ$ как бы “растянуть” так, чтобы он удовлетворял и другому условию: одна из вершин принадлежала стороне BC . Для этого проведём через точки A и N прямую AF . Опустим из точки F перпендикуляр FS на отрезок AC , проведём через точку F прямую, параллельную AC , и из точки G опустим перпендикуляр GR на отрезок AC (построения 5 и 6). Докажем, что $FSRG$ – квадрат. Достаточно доказать, что $FS = FG$. Из подобия треугольников ANP и AFS имеем

$$FS : NP = AF : AN \quad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников AMN и AGF имеем

$$FG : MN = AF : AN \quad (2)$$

Так как $NP = MN$, то из (1) и (2) следует, что $FS = FG$, т. е. $FSRG$ – квадрат. Исследование проведите самостоятельно. \triangleleft

В заключении остановимся на методе симметрии. Задачу иногда удаётся упростить, заменив один из заданных элементов (точку, прямую, окружность) другим, симметрично расположенным относительно некоторой прямой. Классическим примером такой задачи является следующая.

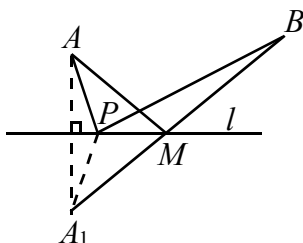


Рис. 26

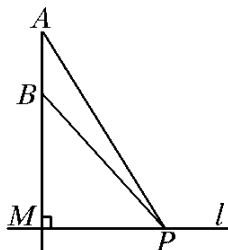


Рис. 27

Задача 15. Даны две точки A и B , расположенные по одну сторону от данной прямой. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая.

▷ Анализ. Рассмотрим точку A_1 , симметричную данной точке A относительно данной прямой (рис. 26), и пусть точка P – произвольная точка этой прямой. Так как $AP = A_1P$, то $AP + BP = A_1P + BP$. Сумма $AP + PB$ будет наименьшей, когда сумма $A_1P + PB$ достигнет наименьшего значения. А последняя сумма, очевидно, будет наименьшей тогда, когда точка P будет лежать на прямой A_1B .

Теперь очевидно построение: строим точку, симметричную одной из заданных точек относительно заданной прямой, проводим через неё и другую точку прямую; точка пересечения построенной прямой и данной будет искомой. Доказательство очевидно. Задача всегда имеет единственное решение. В частном случае, когда точки A и B лежат на общем перпендикуляре к прямой, построение очевидно (рис. 27).

$$AP + PB > AM + BM, \text{ если } P \neq M. \triangleleft$$

Контрольные вопросы

1(6). а) Около окружности описан шестиугольник, пять последовательных сторон которого равны 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно. Чему равна шестая сторона?

б) Около окружности описан треугольник ABC , сторона AB касается окружности в точке K (рис. 1). Как доказать, что $x = p - a$ ($x = AK$, $a = BC$, p – полупериметр)?

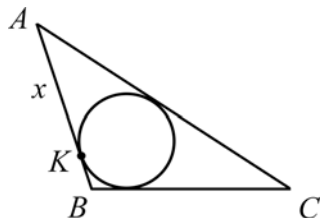


Рис. 1

в) Две окружности вписаны в угол с вершиной в точке S и обе касаются прямой AB : меньшая – в точке M , большая – в точке N (рис. 2). Верно ли, что $AM = BN$? (Используйте обозначения $AM = x$, $MN = y$, $NB = z$).

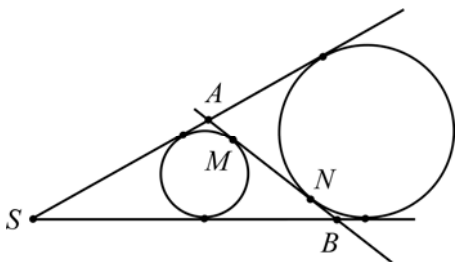


Рис. 2

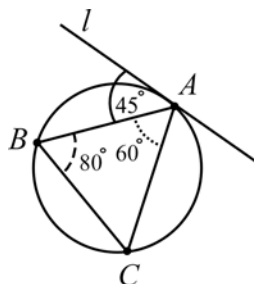


Рис. 3

2(5). а) Как измеряется угол между касательной и хордой с общей точкой на окружности?

б) Могут ли углы быть такими, как на рис. 3, если l – касательная к окружности?

в)*. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , AD – касательная к окружности ω_1 , AC – касательная к окружности ω_2 (рис. 4), $AC = p$, $AD = q$.

Отметьте равные между собой углы и найдите подобные треугольники. Чему

будет равно отношение $\frac{x}{y}$?

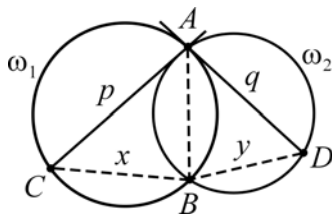


Рис. 4

3(3). а) Как формулируется теорема о касательной и секущей?

б) MA – касательная, MC – секущая (рис. 5), $AC = 2$, $AB = 1$.

Могут ли отрезки MB и BC быть равны?

4(3). а) Как выражается радиус окружности R через хорду окружности a и опирающийся на неё угол α ?

б) Около треугольника ABC описана окружность, $\angle A = 15^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AC = 6$. Чему равен радиус окружности? Чему равна сторона AB ?

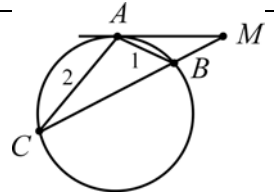


Рис. 5

5(4). Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A , прямой l касаются в точках B и C , AM – общая внутренняя касательная (рис. 6).

а) Чему равен угол BAC ?

б) Чему равен угол O_1MO_2 ?

в) Чему равен отрезок BC ?

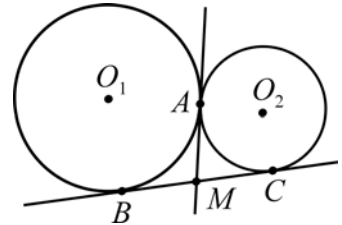


Рис. 6

6(5). а) В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся взаимно перпендикулярные хорды AB и CD . Как доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$?

б) В окружность радиуса $R = 5\sqrt{2}$ вписана трапеция с меньшим основанием 2, диагонали которой взаимно перпендикулярны. Чему равны боковая сторона и большее основание?

7(5). а) Можно ли вписать окружность в четырёхугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны?

б) Окружность с центром в точке O вписана в трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Чему равны углы AOB и COD ?

в) Около окружности описана прямоугольная трапеция. Расстояния от центра окружности до концов наклонной боковой стороны равны $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$. Чему равен радиус окружности?

8(2). Все углы пятиугольника равны между собой. Можно ли около него описать окружность?

9(3). Доказать лемму Адамара (см. задачу 3 Задания) для точки C , лежащей на меньшей дуге AB .

10(6). Даны отрезки $a, b \in c$. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезки (дайте краткое описание)

а) $x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x_2 = \sqrt{ab}$, $x_3 = \frac{a \cdot c}{b}$.

б) Как построение отрезков $y_1 = \sqrt{6} \cdot a$, $y_2 = \sqrt{2ab + 5b^2}$, $y_3 = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$ свести к построению отрезков вида x_1 , x_2 , x_3 ?

Задачи

1(4). Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке M . Известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AM = 2MC$. Найти радиус окружности.

2(5). Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. Через середину катета AC – точку M проведена прямая, пересекающая гипотенузу AB в точке D и продолжение стороны BC в точке K . Известно, что около четырёхугольника $CMDB$ можно описать окружность и $KM = 3$, $MD = 2$.

Найти а) радиус окружности, б) расстояние от точки B до прямой AK .

3(5). Расстояние между центрами окружностей радиусов 4 и 11 равно 25. Найти а) длину общей внешней касательной, б) длину отрезка общей внутренней касательной между двумя внешними касательными.

4(7). Периметр треугольника ABC равен 42, его площадь равна 84, сторона AC равна 15. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AB в точке A_1 и стороны BC в точке C_1 . Найти а) длину отрезка A_1C_1 , б) радиусы r и r_1 окружностей, вписанных в треугольники ABC и A_1BC_1 , в) расстояние между их центрами.

5(6). Окружность проходит через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$, продолжение диагонали BD пересекает окружность в точке K . Известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $BK = \frac{41}{6}$. Найти диагонали параллелограмма.

6(6). Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Касательная к окружности, параллельная диагонали BD , пересекает основание AD в точке M и сторону AB в точке

N , при этом $AM = 6$, $AN = 5$. Найти стороны трапеции и радиус окружности.

7(5). Доказать теорему Птолемея: если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, то имеет место равенство

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

8*(6). В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 4$ и $AD = 8$; диагональ трапеции равна 9. На окружности взята точка F , отличная от точки D и такая, что $BF = 9$. Найти длину отрезка AF .

9(5). Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы две его вершины лежали на хорде, а две другие – на дуге окружности (метод подобия).

10(8). а) Дан отрезок a и угол α . Построить геометрическое место точек, из которых отрезок a виден под углом α .

б)* Даны отрезки a, t и угол α . Построить треугольник с основанием a , противолежащим углом α и медианой t к одной из двух других сторон. (Метод геометрических мест).

11(5). Дан угол и точка M внутри него. Построить треугольник ABM наименьшего возможного периметра, у которого точки A и B лежат на разных сторонах угла (метод симметрии).