§5. Однородные уравнения и системы

Функция $f(x, y)$ называется однородной степени k, если $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$. Например, функция $f(x, y) = 4x^3 y - 5xy^3 + x^2 y^2$ является однородной степени 4, т. к. $f(tx, ty) = 4(tx)^3 (ty) - 5(tx)(ty)^3 + (tx)^2 (ty)^2 = t^4 (4x^3 y - 5xy^3 + x^2 y^2)$. Уравнение $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ – однородная функция, называется однородным. Оно сводится к уравнению с одним неизвестным, если ввести новую переменную $t = \dfrac{y}{x}$.

Система с двумя переменными $\begin{cases} f(x, y) = a, \\ g(x, y) = b \end{cases}$, где $f(x, y)$, $g(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени, называется однородной.

Если $ab \neq 0$, умножим первое уравнение на b, второе – на a и вычтем одно из другого – получим равносильную систему

$$\begin{cases} bf(x, y) - ag(x, y) = 0, \\ g(x, y) = b. \end{cases}$$

Первое уравнение заменой переменных $t = \dfrac{x}{y}$ (или $t = \dfrac{y}{x}$) сведется к уравнению с одним неизвестным.

Если $a = 0$ $\left(b = 0\right)$, то уравнение $f\left(x, y\right) = 0$ $\left(g\left(x, y\right) = 0\right)$ заменой переменных $t = \dfrac{x}{y}$ (или $t = \dfrac{y}{x}$) сведётся к уравнению с одним неизвестным.

Пример 20. (МГУ, 2001, химфак) Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$$

♦ $$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x^2 - xy + y^2\right) + 7\left(y^2 - 2xy\right) = 0, \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0; \\ 5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 19\left(\dfrac{x}{y}\right) + 12 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{19 \pm 11}{10}, \Leftrightarrow \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3}, \\ y = \pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{4}{5}y, \\ y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 5. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

Ответ: $\left(3\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$, $\left(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)$, $\left(4; 5\right)$, $\left(-4; -5\right)$. ♦

