§4. Системы уравнений

1. Самым распространенным методом решений систем является метод **последовательного исключения** неизвестных: выражаем одно неизвестное из одного из уравнений и подставляем в остальные. Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на одно меньше. С новой системой поступаем так же до тех пор, пока это возможно.

Однако очень часто при решении системы этим способом мы приходим к уравнениям, которые невозможно решить. Общих правил для решения систем не существует, но для некоторых систем существуют специальные приемы.

2. Однородные системы
3. Симметрические системы
4. Часто систему можно решить, если ее сначала упростить с помощью **равносильных** преобразований.

Приведем примеры некоторых преобразований, приводящих к равносильным системам.

1. Если любое уравнение системы заменить равносильным ему уравнением, то получим равносильную систему.
2. Если в одном из уравнений системы левая часть является произведением двух функций, то система равносильна совокупности при условии, что справа 0. Например,

$$\begin{cases} f_1(x,y)f_2(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x,y)=0 \\ g(x,y)=0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УР С1)}$$

3. Если какое-нибудь уравнение системы умножить на число, отличное от нуля, то получится система, равносильная исходной. (УР С3)

4. Если к одному из уравнений системы прибавить линейную комбинацию нескольких других, то получим равносильную систему. Например,

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y)+af_2(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0, \end{cases} \qquad \text{(УР С2)}$$

$a-$ произвольное число.

5. $$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y)g_1(x,y)\geq 0, \\ f_1^2(x,y)=g_1^2(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=g_2(x,y); \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x,y)g_1(x,y)>0, \\ f_1^2(x,y)=g_1^2(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{(УРС3)}$$

Обратим внимание на то, что в равносильной системе появилось ***дополнительное неравенство!*** (т. к. возведение в квадрат не всегда приводит к равносильному уравнению.)

6. $$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=g_2(x,y); \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y)\neq 0, \\ f_2(x,y)f_1(x,y)=g_2(x,y)g_1(x,y). \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{(УР С4)}$$

Обратим внимание на то, что в системе остается то уравнение, в котором **обе части отличны от нуля!**

7. $$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ f(x,y)-g(x,y)=0 \end{cases} \qquad \text{(УР С5)}$$

т. к.

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ f(x,y)+g(x,y)-2g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ f(x,y)-g(x,y)=0. \end{cases}$$

Пример 16. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+y-z=3, \\ y+z-2x=1, \\ x^4+yz+y-2z=3. \end{cases}$

♦ Выразим y из второго уравнения $y=1-z+2x$, подставим в первое и третье и получим систему с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2x^2+(1-z+2x)-z=3, \\ x^4+z(1-z+2x)+(1-z+2x)-2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-2z=2, \\ x^4+2zx+2x-z^2-2z=2. \end{cases}$$

Теперь выразим из первого уравнения $z=x^2+x-1$ и, подставив во второе, получим уравнение с одним неизвестным

$$x^4+2x(x^2+x-1)+2x-(x^2+x-1)^2-2(x^2+x-1)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow z=1 \Rightarrow y=2, \\ x=-1 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow y=0. \end{array}\right. \Rightarrow$$ **Ответ:** (1;2;1), (–1;0;–1).

Пример 17. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2. \end{cases}$

♦ Выразим x из первого уравнения и подставим во второе и третье уравнения. Тогда получим равносильную систему

$$\begin{cases} x=2y-3z+9, \\ 4y^2+9z^2-6yz-27z+18y=54 \Leftrightarrow \\ 6yz-9z^2+27z-4y^2=0. \end{cases}$$

Теперь прибавим ко второму уравнению третье

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z+9, \\ 18y=54 \Leftrightarrow y=3, \\ 18z-9z^2+27z-36=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{5\pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3, z=4 \Rightarrow x=3; \\ y=3, z=1 \Rightarrow x=12. \end{array}\right.$$

Ответ: $(3,\,3,\,4),\ (12,\,3,\,1)$. ♦

Пример 18. (МФТИ, 1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2+9x+30y+8=0, \\ x^2+6xy+8y^2-2x-8=0. \end{cases}$$

♦ В данной системе будем рассматривать каждое уравнение как квадратное относительно, например, x. Так как дискриминанты обоих уравнений являются полными квадратами, оказывается возможным свести систему двух нелинейных уравнений к совокупности четырех линейных систем.

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2+9x+30y+8=x^2+x(2y+9)-(8y^2-30y-8)=0, \\ x^2+6xy+8y^2-2x-8=x^2+2x(3y-1)-(8-8y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2y-9\pm(6y-7)}{2} \Leftrightarrow (x-2y+8)(x+4y+1)=0, \\ x=\dfrac{-3y+1\pm(y-3)}{1} \Leftrightarrow (x+2y+2)(x+4y-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y+8=0, \\ x+2y+2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y+8=0, \\ x+4y-4=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+4y+1=0, \\ x+2y+2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+4y+1=0, \\ x+4y-4=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5, \\ y=\dfrac{3}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \{\varnothing. \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $\left(-5;\ \dfrac{3}{2}\right), (-4;\ 2), \left(-3;\ \dfrac{1}{2}\right)$. ♦

Пример 19. (МФТИ, 1999) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ y^2+2x+8y+10=0. \end{cases}$$

$$\blacklozenge \ \begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0, \\ y^2 + 2x + 8y + 10 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Заменим второе уравнение системы суммой

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0, \\ x^2 - 4x + 4y + 27 + y^2 + 2x + 8y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0, \\ (x-1)^2 + (y+6)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 - 4 \cdot 1 + 4(-6) + 27 \equiv 0, \\ x = 1, \\ y = -6. \end{cases}$$

Заметим, что решение второго уравнения – это еще **не решение** системы**.** Полученные числа необходимо подставить в оставшееся первое уравнение системы. В данном случае после подстановки получаем тождество. **Ответ:** $(1, -6)$. ♦