§3. Неравенства, содержащие модуль

В этом параграфе рассматриваются неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (под знаком модуля).

Во многих случаях для решения таких неравенств целесообразно разбить числовую ось на промежутки так, чтобы функции, стоящие под знаком модуля, на каждом из промежутков сохраняли знак, т. е. были или положительными, или отрицательными. Тогда на каждом таком промежутке неравенство можно записать без модуля. В таком случае говорят, что мы раскрыли модуль.

Пример 12. (МГУ, 1993) Решите неравенство $\dfrac{|x-1|}{x+2}<1$.

♦ $\dfrac{|x-1|}{x+2}<1 \Leftrightarrow \dfrac{|x-1|-x-2}{x+2}<0$.

1. $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$: $\dfrac{x-1-x-2}{x+2}=-\dfrac{3}{x+2}<0 \Leftrightarrow x>-2$. Получаем в этом случае $x\ge 1$.
2. $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$: $\dfrac{-x+1-x-2}{x+2}=-\dfrac{2x+1}{x+2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x+0,5}{x+2}>0$.

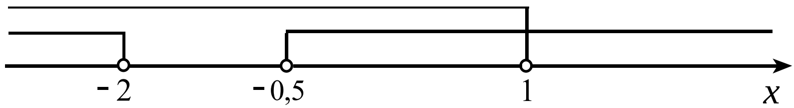

Рис. 4

И мы получаем в этом случае $x\in(-\infty;-2)\cup(-0,5;1)$.
Объединяя результаты 1. 2., получаем окончательный
Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-0,5;+\infty)$

Пример 13. (МГУ, 1992) Решите неравенство $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4}\le 1$.

♦ $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{|x-5|-2|x-6|+3}{2|x-6|-4}\le 0.$

1. $x>6$: $\dfrac{x-5-2x+12+3}{2x-12-4}=\dfrac{10-x}{2x-16}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;8)\cup[10;+\infty)$.

Учитывая условие $x>6$, получаем $x\in(6;8)\cup[10;+\infty)$.

2. $5\le x\le 6$: $\dfrac{x-5+2x-12+3}{-2x+12-4}=\dfrac{3x-14}{8-2x}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;4)\cup\left[\dfrac{14}{3};+\infty\right)$.

Учитывая условие $x\in[5;6]$, получаем $x\in[5;6]$.

3. $x<5$: $\dfrac{-x+5+2x-12+3}{-2x+12-4}=\dfrac{x-4}{8-2x}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le 0,\\ x\ne 4.\end{cases}$

Учитывая условие $x<5$, получаем $x\in(-\infty;4)\cup(4;5)$.

Ответ: $(-\infty;4)\cup(4;8)\cup[10;+\infty)$. ♦

п.1. Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$

Пусть в некоторой точке a выполнено неравенство $|f(x)| < g(x)$, тогда $g(a) > 0$ и $|f(a)| < g(a)$.

Тогда имеет место картинка

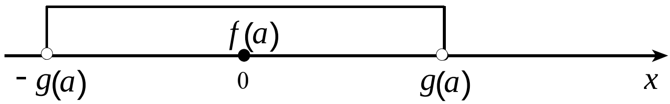

Рис. 5

и неравенства $-g(a) < f(a) < g(a)$.

И, наоборот,: пусть в некоторой точке a выполнены неравенства $-g(a) < f(a) < g(a)$. Тогда, во-первых, $-g(a) < g(a) \Leftrightarrow g(a) > 0$, а, во-вторых, $|f(a)| < g(a)$. Следовательно, имеет место условие равносильности

$$\boxed{|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}} \quad \text{(УР М1)}$$

п.2. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$.

Пусть в некоторой точке a неравенство выполнено, т. е. $|f(x)| > g(x)$. Это означает, что, или,

а) $g(a) < 0$ (модуль принимает неотрицательные значения и всегда больше любого отрицательного числа), или,

б) если $g(x) \geq 0$, имеет место картинка

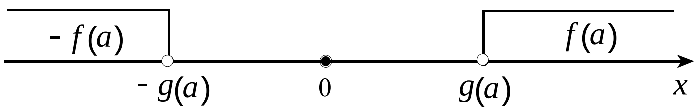

Рис. 6

и совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(a) > g(a), \\ f(a) < -g(a). \end{array}\right.$

И, наоборот, пусть в некоторой точке a имеет место совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(a)>g(a), \\ f(a)<-g(a). \end{array}\right.$

Тогда,

а) если $g(a)<0$, то неравенство $|f(a)|>g(a)$ выполнено,

б) если $g(a)\geq 0$, то имеет место предыдущая картинка и выполнено неравенство $|f(a)|>g(a)$.

Следовательно, имеем равносильные соотношения

$$\boxed{|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.} \qquad \text{(УР М2)}$$

Пример 14. (МГУ, 2000, ВМК)

Решите неравенство $\left||x^2-8x+2|-x^2\right|\geq 2x+2.$

♦ $\left||x^2-8x+2|-x^2\right|\geq 2x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2\geq 2x+2, \\ |x^2-8x+2|-x^2\leq -2x-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|\geq x^2+2x+2, \\ |x^2-8x+2|\leq x^2-2x-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-8x+2\geq x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2\leq -x^2-2x-2; \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+2\leq x^2-2x-2, \\ x^2-8x+2\geq -x^2+2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ x\in[1;2]; \\ \left\{\begin{array}{l} x\geq\dfrac{2}{3}, \\ x\in(-\infty;0]\cup[5;+\infty) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$. ♦

п.3. Неравенство вида $\left|f(x)\right|<\left|g(x)\right|$.

Рассмотрим разность $|f(x)|-|g(x)|$. Она может быть любого знака, но сумма $\left|f(x)\right|<\left|g(x)\right|$ всегда неотрицательна, и умножение разности на эту сумму не изменит знака разности, т. е.

$$\left(\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|\right)\left(\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\right)=$$

$$=\left(\left|f(x)\right|^2-\left|g(x)\right|^2\right)=\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=\left(f(x)-g(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)$$ и

знак разности $\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|$ совпадает со знаком произведения $\left(f(x)+g(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)$ (П М1)

Имеем еще одно условие равносильности

$$\boxed{\left|f(x)\right|<\left|g(x)\right|\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)<0.}$$

(УР М3)

Пример 15. (МФТИ, 2000)

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\le 0.$

♦ ОДЗ*: $-x^2+7x-6\ge 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-6\right)\le 0\Leftrightarrow x\in\left[1;6\right].$

В ОДЗ* имеем $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\le 0\Leftrightarrow$ (в силу УРМ3)

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left(2x^2-8x+2\right)\left(-4x+8\right)}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-2\right)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-7x+6=0,\\ x\ne 2\pm\sqrt{3},\\ x\ne 2,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=6,\end{array}\right.\\ \left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-2\right)>0\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3};2\right)\cup\left(2+\sqrt{3};+\infty\right).\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ*, получаем

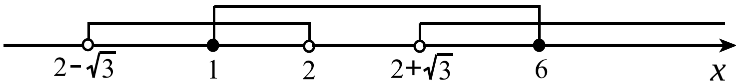

Рис. 7

Ответ: $\left[1;2\right)\cup\left(2+\sqrt{3};6\right]$. ♦