Цель нашего задания – вспомнить основные правила и приемы решения алгебраических неравенств и систем уравнений. Многие из них вам хорошо известны, некоторые покажутся новыми и, с первого взгляда, даже лишними, но не спешите их отбросить сразу – решите известную вам задачу разными способами и выберите сами тот способ, который вам больше нравится.

§1. Равносильность уравнений и неравенств

В нашем задании большую роль будет играть понятие равносильности.

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \text{ и } f_2(x) > g_2(x) \tag{1}$$

или два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = g_2(x) \tag{2}$$

называются равносильными на множестве X, если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X, является решением второго и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее X, является решением первого, или, если, ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений. Т.е. два неравенства (уравнения) равносильны, по определению, если множества решений этих неравенств (уравнений) на X совпадают.

Отсюда следует, что вместо того, чтобы решать данное неравенство (уравнение), можно решать любое другое, равносильное данному. Замену одного неравенства (уравнения) другим, равносильным данному на X, называют равносильным переходом на X. Равносильный переход обозначают двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Если уравнение $f(x) = 0$ (или неравенство $f(x) > 0$) равносильно уравнению $g(x) = 0$ (или неравенству $g(x) > 0$), то это мы будем обозначать так:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ (или } f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0\text{)}.$$

Пример 1. $\sqrt{x^2 - 4} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x - 2} = 0$, т. к. ни то, ни другое не имеет решения.

Важно понимать, что для доказательства неравносильности двух неравенств (уравнений) нет необходимости решать каждое из неравенств (уравнений), а затем убеждаться в том, что множества их решений не совпадают – достаточно указать одно решение одного из неравенств (уравнений), которое не является решением другого неравенства (уравнения).

Пример 2. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-(2a+4)x+2(a^2+a+2)=0 \end{cases}$$

равносильны?

♦ Решим сначала первую, более простую систему

$$\begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2a-x, \\ ax+3(2a-x)=6a-4 \Leftrightarrow x(a-3)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\neq 3, \\ x=-\dfrac{4}{a-3}, \\ y=2a+\dfrac{4}{a-3}=\dfrac{2a^2-6a+4}{a-3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ 0\cdot x=-4 \Leftrightarrow \varnothing. \end{cases} \end{array} \right.$$

Подставим $a=3$ во вторую систему

$$a=3: \begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-10x+28=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2+3=0 \Leftrightarrow \varnothing, \end{cases} \Rightarrow$$

При $a=3$ системы **равносильны**, т. к. при этом значении параметра обе системы не имеют решений.

При $a\neq 3$ первая система имеет единственное решение. Заметим, что во второй системе y входит только в четной степени, значит, если решением является пара (x_0, y_0), то пара $(x_0, -y_0)$ тоже будет решением. При этом если $y_0 \neq -y_0 \Leftrightarrow y_0 \neq 0$, то решений будет два. Следовательно, единственным решением **может быть** только пара $(x_0, 0)$. Посмотрим, при каких a такое решение у системы есть. Подставим эту пару в систему

$$\begin{cases} x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3 \pm 1, \\ x_0^2 - (2a+4)x_0 + 2(a^2 + a + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 2, \\ a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = \left[\begin{array}{l} 0, \\ 1; \end{array} \right. \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = 4, \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \left[\begin{array}{l} 2, \\ 1. \end{array} \right. \end{cases} \end{array} \right.$$

Итак, таких a три: $0, 1, 2$. Но при этих a вторая система может иметь и другие решения, а если у неё других решений нет, то её единственное решение может не совпадать с решением первой системы, и тогда такое a не удовлетворяет условию задачи. Проверим эти значения параметра.

1. $a = 0$: Первая система имеет решение: $x = \dfrac{4}{3}$ и $y = -\dfrac{4}{3} \neq 0. \Rightarrow$ Системы не равносильны, т.к. решения систем не совпадают (у второй $y = 0$).

2. $a = 1$: Вторая система имеет вид

$$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 3 \pm 1 = 4;\ 2. \end{cases} \Rightarrow$$

Системы не равносильны, т. к. вторая имеет два решения.

3. $a = 2$: $\begin{cases} ax + 3y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0 \end{cases}$

и $$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a+4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ (x-4)^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Системы при этом значении a *равносильны* – они имеют единственное решение $(4;0)$.

Ответ: $2;\ 3.$ ♦

При решении неравенств и уравнений часто используются следующие равносильные переходы.

1. Если функции $f(x), g(x), h(x)$ определены на множестве X, то на этом множестве

$$\text{а)}\ f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x). \qquad (\text{УР } 1)$$

$$\text{б)}\ f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x). \qquad (\text{УР } 2)$$

2. Если $h(x) > 0$ на X, то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x), \qquad (\text{УР } 3)$$

т.е. умножение неравенства на **положительную** функцию приводит к равносильному неравенству с тем же знаком.

3. Если $h(x) < 0$ на X, то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x), \qquad (\text{УР } 4)$$

т.е. при умножении неравенства на **отрицательную** функцию знак неравенства ***меняется*** на противоположный.

4. Если $h(x) \neq 0$ на X, то на X

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x). \qquad (\text{УР } 5)$$

5. Если обе части неравенства неотрицательны на X, то возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному неравенству, т. е.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x). \qquad (\text{УР } 6)$$

Если обе части неравенства отрицательны, то умножив обе части на (–1), придём к неравенству противоположного знака, но с положительными частями, и к нему применим (УР 6).

Если левая и правая части неравенства имеют ***разные*** знаки, то возведение в квадрат может привести как к верному, так и к неверному неравенству: $-4 < 5;\ 16 < 25;\ -7 < 5,$ но $49 > 25,$ поэтому в этом случае ***нельзя*** возводить неравенство в квадрат.

6. Если обе части уравнения ***неотрицательны***, то

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x). \qquad (\text{УР } 7)$$

7. Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и любого натурального n

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x). \qquad (\text{УР } 8)$$

8. Неравенство вида $f(x) \geq 0 (\leq 0)$ называется нестрогим. По определению,

$$f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ f(x) > 0 (< 0). \end{array}\right. \qquad (\text{УР } 9)$$