Контрольные вопросы

1(5). Что называют алгебраической формой комплексного числа z? Запишите в алгебраической форме следующие числа:

а) $(2i+5)-6(3i-2)$; б) $(4+i)(2i-1)$;

в) $i^5+i^4+i^3+i^2$; г) $\dfrac{3+4i}{1+4i}$.

2(2). Найдите z, если известно, что $z+\overline{z}=3$, $i(z-\overline{z})=30$.

3(3). Какие из следующих выражений являются тригонометрической формой числа $z=i-1$:

а) $2i-(i+1)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

в) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; г) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$;

д) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$; е) $\sqrt{2}\left(\cos 855^{\circ}+i\sin 855^{\circ}\right)$.

4(5). Запишите следующие числа в тригонометрической форме:

$z_1=-10$; $z_2=-5i$; $z_3=i-\sqrt{3}$; $z_4=4-4i$; $z_5=3i-2$.

5(8). Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z+i-2|=3$; б) $|z-2i|=|z+4|$;

в) $\arg z=\frac{13\pi}{6}$; г) $\arg\overline{z}=\frac{2\pi}{3}$.

6(9). Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислите:

а) $\frac{(1+i)^{2010}}{2^{1000}}$; б) $\frac{\left(i-\sqrt{3}\right)^{1337}(i-1)^{250}}{\left(i\sqrt{3}-1\right)^{1453}}$; в) $\sqrt[6]{1}$; г) $\sqrt[4]{-4}$; д) $\sqrt[3]{-27i}$.

7(3). Сформулируйте теорему Безу. Делится ли многочлен $3z^6-5z^3-10z-18$ на многочлен а) $z+1$; б) $z-2$? Если нет, то найдите остаток от деления.

8(6). Решите квадратное уравнение:

а) $z^2+5z+18=0$; б) $z^2-(6i+4)z-21+12i=0$;

в) $z^2+(3i+5)z-16+3i=0$.

9(3). Докажите соотношения а), в), д) на стр. 8.

Задачи

1(5). Представьте число z в тригонометрической форме, если

а) $z=\sin\frac{13\pi}{5}+i\cos\frac{2\pi}{5}$; б) $z=1+\sin 4\alpha+i\cos 4\alpha$,

где $\frac{\pi}{8}<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

2 *(3). Найдите $z^n+\frac{1}{z^n}$, если $z+\frac{1}{z}=-1$, $n\in\mathbb{N}$.

3(8). Решите уравнение:

а) $\left(\overline{z}\right)^2 = z^3$; б) $z^2 - z|z| + |z|^2 = 0$;

в) $\left(3\overline{z} - 2i + 1\right)\left(i+1\right) + \left(z-4\right)\left(2i-5\right) = \left(i-2\right)\left(i+3\right)$.

4(9). Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\dfrac{z+2i}{2i-5} = \dfrac{\overline{z}-2i}{-2i-5}$;

б)* $-\dfrac{\pi}{4} \le arg\left(iz + 2 + i\right) \le \dfrac{\pi}{3}$;

в) $\left|\dfrac{z+i}{z-i+2}\right| = 3$; г) $\left(3i-1\right)z = \left|z\sqrt{3}\right|$.

5*(4). Вычислите сумму

$$S = \cos\varphi + a\cos 2\varphi + a^2\cos 3\varphi + ... + a^{n-1}\cos n\varphi.$$

6(2). Остаток от деления многочлена $F\left(z\right)$ на многочлен $\left(2z+5\right)$ равен 5, а остаток от деления многочлена $F\left(z\right)$ на многочлен $\left(3z-1\right)$ равен 6. Найдите остаток от деления многочлена $F\left(z\right)$ на многочлен $6z^2 + 13z - 5$.

7(2). Решите уравнение $z^4 + 3z^3 + 7z^2 + 8z + 6 = 0,$ если число $z_1 = i - 1$ является его корнем.

8*(4). Сумма квадратов корней уравнения $z^3 - 6z^2 + \alpha z + 40 = 0$ равна 28. Найдите α и решите это уравнение.

9(2). Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа $z_1 = 3i$, $z_2 = 3$, $z_3 = -2 - i$.

10*(4). Найдите остаток от деления многочлена $z^{2010} - 4z^{2009} + 3$ на многочлен $z^2 + z + 1$.

11(4). Представьте следующие многочлены в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

а) $324z^4 + 1$; б) $z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 25z^2 + 49z - 30$.