§4. Алгебраические уравнения

1.Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, \tag{10}$$

с действительными коэффициентами *a, b, c.* Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \tag{11}$$

В случае, если $D < 0,$ говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right),$$

откуда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются на множестве комплексных чисел.

Таким образом, на множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2+bz+c=0,\quad a\neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D=b^2-4ac=0,$ уравнение имеет один корень (2 совпадающих корня или один корень кратности два); при $D\neq 0,$ уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула $x=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a},$ где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

Пример 12. Решить уравнение $z^2+z+1=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3},$ то $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},$ $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

Пример 13. Решить уравнение $z^2+(2i-3)z+5-i=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15-8i}$ положим

$$\sqrt{-15-8i}=x+iy.$$

Тогда $-15-8i=x^2-y^2+2ixy$, следовательно, x и y удовлетворяют системе $\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\ 2xy=-8,\end{cases}$

причем x и y – действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1=1, y_1=-4$ и $x_2=-1, y_2=4.$

Поэтому $z_1 = \dfrac{3-2i+(1-4i)}{2} = \dfrac{4-6i}{2} = 2-3i,$

$$z_2 = \frac{3-2i+(-1+4i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т.е. двучленного уравнения степени *n*. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего *алгебраического* уравнения степени *n*:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad (12)$$

где $a_0, ..., a_n$ – заданные комплексные числа.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (12), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу:*

Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z - z_0$ равен $P_n(z_0)$, т.е. равен значению этого многочлена при $z = z_0$.

Действительно, $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$, где остаток $r(z)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$, т.е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z) = r$ является числом: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r$.

Положим в этом равенстве $z = z_0$. Получаем $P_n(z_0) = r$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $z - z_0$ и $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.

Пример 14. Остаток от деления многочлена $F(z)$ на $(z-3-i)$ равен $3i$, а остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(z+i-1)$ равен 5. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(z-3-i)(z+i-1)$.

Решение. По теореме Безу $F(3+i)=3i,\ F(1-i)=5.$

При делении многочлена $F(z)$ на многочлен второй степени остаток будет являться многочленом первой степени, то есть, в результате деления мы получим: $F(z)=(z-3-i)(z+i-1)\cdot Q(z)+az+b,$ где $Q(z)-$ частное от деления, a è $b-$ некоторые комплексные числа. Подставим в это равенство $z=3+i$ и $z=1-i.$

$$z=3+i \Rightarrow 3i=a\cdot(3+i)+b,$$
$$z=1-i \Rightarrow 5=a\cdot(1-i)+b.$$

Решая эту систему, находим, что $a=\dfrac{4i-1}{2}, b=\dfrac{7-5i}{2}.$

Значит, остаток $r(z)=\dfrac{4i-1}{2}\cdot z+\dfrac{7-5i}{2}.$

Пример 15. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)=z^{1502}-90z^{175}+3$ на многочлен $z^2+1.$

Решение. Выполним деление с остатком:

$$z^{1502}-90z^{175}+3=(z^2+1)Q(z)+az+b. \qquad (13)$$

Числа $z=\pm i$ являются корнями многочлена $z^2+1,$ поэтому имеет смысл подставить их в равенство (13).

$$z=i \Rightarrow i^{1502}-90i^{175}+3=ai+b,$$
$$z=-i \Rightarrow (-i)^{1502}-90(-i)^{175}+3=-ai+b.$$

Упрощая, получаем систему $\begin{cases}2+90i=ai+b\\ 2-90i=-ai+b\end{cases},$

решениями которой являются числа $a=90$ и $b=2.$

Значит, остаток равен $r(z)=90z+2.$

Замечание. Обратите внимание, что мы решим задачу, в условии которой были даны только действительные числа, с помощью комплексных чисел. При этом в ответе вышел также многочлен с действительными коэффициентами.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет на множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения

$$a_n(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}, \tag{14}$$

где $z_1, z_2, ..., z_k$ – некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – натуральные числа, причем $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$ (доказательство может быть произведено индукцией по n).

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, ..., z_k$ и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1 является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т.д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет на множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Заметим, что если уравнение не является алгебраическим, то эта теорема, вообще говоря, неверна.

Отметим также следующее утверждение. *Если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена.* Покажем это.

Если z_0 – корень многочлена P_n, то это значит, что $P_n(z_0)=0.$ Тогда $\overline{P_n(z_0)}=0,$ то есть $\overline{a_nz_0^n+a_{n-1}z_0^{n-1}+\ldots+a_1z_0+a_0}=0.$

Пользуясь равенствами (в) и (г), получаем, что

$$\overline{a_n}\left(\overline{z_0}\right)^n+\overline{a_{n-1}}\cdot\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\ldots+\overline{a_1}\,\overline{z_0}+\overline{a_0}=0.$$

Поскольку числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ действительные, то

$$\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \ldots, \overline{a_0} = a_0.$$

Таким образом, $a_n\left(\overline{z_0}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{z_0}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_0} + a_0 = 0,$ что и означает, что число $\overline{z_0}$ есть корень многочлена P_n.

Можно также показать, что если для многочлена с действительными коэффициентами z_0 – корень кратности k, то и $\overline{z_0}$ корень кратности k.

Разложение (14) для многочленов с действительными коэффициентами примет вид:

$$P_n(z) = a_n\left(z - z_1\right)^{\alpha_1}\left(z - \overline{z_1}\right)^{\alpha_1}\left(z - z_2\right)^{\alpha_2}\left(z - \overline{z_2}\right)^{\alpha_2}\ldots \qquad (15)$$

$$\ldots\left(z - z_l\right)^{\alpha_l}\left(z - \overline{z_l}\right)^{\alpha_l}\cdot\left(z - z_{l+1}\right)^{\alpha_{l+1}}\left(z - z_{l+2}\right)^{\alpha_{l+2}}\ldots\left(z - z_m\right)^{\alpha_m},$$

причем $2\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l\right) + \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \ldots + \alpha_m = n.$

Здесь $z_1, z_2 \ldots, z_l$ – комплексные числа; $z_{l+1}, z_{l+2} \ldots, z_m$ – действительные числа.

Заметим, что $\left(z - z_i\right)\cdot\left(z - \overline{z_i}\right) = z^2 - \left(z_i + \overline{z_i}\right)z + z_i\overline{z_i}$ есть квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Мы получили следующее утверждение: *любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами.*

Пример 16. Решите уравнение: а) $z^3 = \overline{z}$; б) $|z| + iz = 3 - 5i.$

Решение. а) Представим число z в тригонометрической форме:

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Вспомним, что $|\overline{z}| = |z|,$ а в качестве одного из аргументов числа $\overline{z}$ можно выбрать $(-\varphi).$ Тогда уравнение принимает вид:

$$\rho^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) = \rho\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right). \qquad (16)$$

Возможны два случая:

(1) $\rho = 0,$ тогда $z = 0,$ и это решение уравнения.

(2) $\rho \neq 0.$ Тогда выполнения равенства (16) означает, что у чисел в левой и правой части равны модули, а аргументы отличаются на $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\varphi = -\varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \qquad (17)$$

Несложно понять, что мы получим всевозможные решения, если подставим в (17) значения $k = 0, 1, 2, 3.$

Итак, $z = 1\ (\text{при } k = 0);\ z = i\ (\text{при } k = 1);\ z = -1\ (\text{при } k = 2),\quad z = -i$ (ï ðè $k = 3$).

Ответ: $0; \pm 1; \pm i.$

б) Пусть $z = x + iy.$ Тогда $\sqrt{x^2 + y^2} + ix - y = 3 - 5i.$

Приравниваем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sqrt{25 + y^2} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ 25 + y^2 = y^2 + 6y + 9, \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Значит, $z = -5 + \dfrac{8}{3}i.$ **Ответ:** $-5 + \dfrac{8}{3}i.$

Выше сформулированные теоремы полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\dfrac{a_0}{a_1}$, корни уравнения второй степени $a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ всегда могут быть легко получены с помощью формулы (11), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьей и четвертой степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвёртой подобных формул в общем случае просто не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z = k$ – целый корень уравнения

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – целые числа. Тогда $a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1k + a_0 = 0.$ Отсюда получаем, что $a_0 = -k(a_nk^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + \cdots + a_1),$ то есть k – делитель числа a_0 (число $a_nk^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + \cdots + a_1$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 17. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0.$

Рассматривая делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z - 5$:

$$\begin{array}{r|l}
-\ z^3 - 4z^2 - 4z - 5 & z-5 \\ \cline{2-2}
z^3 - 5z^2 \qquad\qquad & z^2 + z + 1 \\ \cline{1-1}
-\ z^2 - 4z \qquad & \\
z^2 - 5z \qquad & \\ \cline{1-1}
-\ z - 5 & \\
z - 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}.$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z-5)(z^2 + z + 1).$

Решая квадратное уравнение $z^2+z+1=0$ (см. пример 12), получаем остальные корни. Итак, $z_1=5,\quad z_2=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 18. Найти целые корни уравнения $2z^3-5z^2-2z+2=0.$

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm1,\ \pm2.$ Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 19. Решить уравнение $z^4-2z^3-12z^2+18z+27=0.$

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z=-1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4-2z^3-12z^2+18z+27$ на $z+1$, получим многочлен $z^3-3z^2-9z+27.$ Корнем уравнения $z^3-3z^2-9z+27=0$ является число $z=3.$ Разделив многочлен $z^3-3z^2-9z+27$ на $z-3$, получим $z^2-9.$ Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде $(z+1)(z-3)(z^2-9)=0,$
т.е. имеет два однократных корня $z=-1, z=-3$ и один двукратный корень $z=3.$

