В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2, ... *n*, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными на множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Комплексные числа. Комплексными числами называют выражения вида $a+bi$, в которых a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ и для которых следующим образом вводятся понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ *равны* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$; (пишут $a+bi=c+di$)

б) *суммой* чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число

$$a+c+(b+d)i;$$

в) *произведением* чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число

$$ac-bd+(ad+bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i, \qquad (1)$$

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i. \qquad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z=a+bi$ означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z, при этом действительное число a называется <u>действительной частью</u> комплексного числа $\left(z=a+bi\right)$ и обозначается $\operatorname{Re} z$; пишут $\operatorname{Re} z=a$; или $\operatorname{Re}\left(a+bi\right)=a$. Число b называется <u>мнимой частью</u> числа $z=a+bi$ и обозначается $\operatorname{Im} z$, пишут $\operatorname{Im} z=b$ или $\operatorname{Im}\left(a+bi\right)=b$. <u>Символ i</u> называется <u>мнимой единицей.</u>

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a+0i$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a+0i)+(c+0i)=a+c+0i,$$
$$(a+0i)(c+0i)=(ac)+0i.$$

Таким образом, отождествив число $a+0i$ с действительным числом a, получим, что каждое действительное число содержится во множеству комплексных чисел, а именно $a=a+0i$. В частности, число $0=0+0i$ будем, как обычно, называть нулём, а число $1=1+i0$ – единицей.

Числа вида $0+bi$ называют чисто мнимыми и обозначаются bi: $0+7i=7i,\ 0-2i=-2i.$

На основании формулы (2) найдем значение выражения $i^2=ii$:

$$i^2=ii=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

Таким образом,

$$i^2=-1. \tag{3}$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a+bi$ и $c+di$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=8+3i$ и $z_2=-5+2i$. По формуле (1) находим

$$z_1+z_2=8-5+i(3+2)=3+5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8+3i)$ и $(-5+2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1z_2=(8+3i)(-5+2i)=-40-15i+16i+6i^2=-40+i-6=-46+i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*: $z_1+z_2=z_2+z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2.
2. *Ассоциативность сложения*: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.
3. $z+0=z$ для любого комплексного числа z.
4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2-z_1.
5. *Коммутативность умножения*: $z_1z_2=z_2z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2.

6. *Ассоциативность умножения*: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

7. *Дистрибутивный закон*: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

8. $1 \cdot z = z$ для любого комплексного числа z.

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, существует число z такое, что $z_2z = z_1$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения. Докажем свойство 9; остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z = x + yi$. Тогда равенство $zz_2 = z_1$ запишется так: $a + bi = (x + yi)(c + di) = xc - yd + (xd + yc)i.$

Отсюда следует, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений: $\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \qquad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \tag{4}$$

Пример 2. Найти разность $z_1 - z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 7i \text{ и } z_2 = -1 + 3i.$$

Находим разность

$$z_1 - z_2 = (2 - 7i) - (-1 + 3i) = (2 - (-1)) + i(-7 - 3) = 3 - 10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1) + (-7)3}{1 + 9} + i\frac{-7(-1) - 2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{-23}{10} + \frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла. Невозможно перенести понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, если мы при этом хотим сохранить все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, что при умножении обеих частей неравенства на положительное число оно остается верным и т. п.). Например, покажем, что числа i è 0 сравнить невозможно.

Предположим, что $i>0$. Тогда умножая обе части неравенства на i (по предположению $i>0$, поэтому знак неравенства не меняем), получаем $i^2>0$, т.е. $-1>0$, что неверно. Предположим, что $i<0$. Тогда, умножив обе части неравенства на i, снова получим, что $i^2>0$.

Таким образом, сравнить числа i и 0 невозможно.