Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Стереометрия

Задание №5 для 11-х классов

(2009-2010 учебный год)

г. Долгопрудный, 2010

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 11-х классов (2009-2010 учебный год). - М.: МФТИ, 2009, 32с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 1 марта 2010г.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 12.01.10
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 1100. Заказ №14-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-65-83– **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Векторы в пространстве. Координатный метод решения задач стереометрии

Вектором называется направленный отрезок, и буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия: абсолютная величина (длина) вектора, равенство векторов, угол между векторами.

Напомним некоторые отличия, связанные с трёхмерностью пространства, и важные для приложений понятия и утверждения.

1°. В трёхмерном пространстве вектор имеет три координаты: если в прямоугольной декартовой системе координат точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$ – его начало, а точка $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – его конец, то координатами вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ называют числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Записывается

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

2°. Арифметические действия – сумма векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и произведение вектора $\vec{a}$ на число λ определяются аналогично двумерному случаю:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2,\ a_3 + b_3),$$
$$\lambda\vec{a} = \vec{d}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

и сохраняются все свойства этих операций.

3°. Длина вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4°. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой.

Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

5°. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ определяется равенством $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между этими векторами:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$$

(здесь $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Отсюда следует, что длина отрезка AB находится по известному вектору $\overrightarrow{AB}$ по формуле $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}.$

6°. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

I. Угол между прямыми

Углом между прямыми a *и* b *называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными двум данным.* Угол между прямыми измеряется <u>от 0 до 90°</u>. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, лежащие на прямых a и b, и φ – угол между этими прямыми, то

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|.$$

Задача 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=1$, $AD=2$, $AA_1=2$. Точка M – середина диагонали AD_1 грани AA_1D_1D, точка N – середина ребра B_1C_1. Найти угол, который образует диагональ параллелепипеда B_1D с а) прямой AD_1, б) прямой MN.

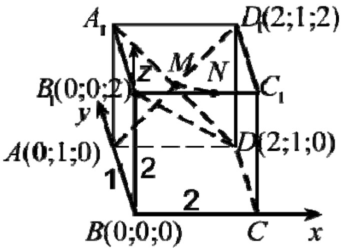


Рис. 1

ΔВведём прямоугольную систему координат с началом координат в точке B, как показано на рис. 1. Определяем координаты точек B_1, D, A, D_1, M и N и находим координаты векторов $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$:

$$B_1(0;0;2),\ D(2;1;0)\Rightarrow\overrightarrow{B_1D}=(2;1;-2);$$

$$A(0;1;0),\ D_1(2;1;2)\Rightarrow\overrightarrow{AD_1}=(2;0;2);$$

$$M(1;1;1),\ N(1;0;2)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(0;-1;1).$$

Так как $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$, то $B_1D\perp AD_1$, угол между прямыми B_1D и AD_1

равен 90°.

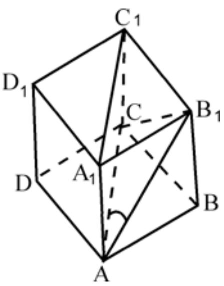
Если φ – угол между прямыми MN и B_1D, то

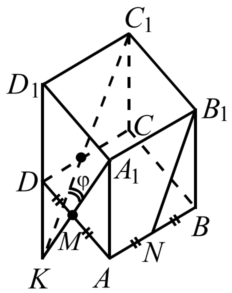
$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1D}\right|}\right| = \left|\frac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

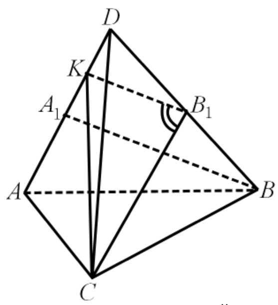
значит прямые MN и BD_1 образуют угол 45°. ▲

Замечание 1. При координатном методе решения удобно делать большой рисунок и координаты соответствующих точек выписывать на этом рисунке. Как правило, ошибок бывает меньше.

Замечание 2. В ряде задач угол между прямыми в пространстве всё же удобнее находить как равный ему (или смежный) угол треугольника, который образуется при параллельном переносе одной прямой до пересечения с другой. Вот два примера с кубом (ребро куба равно a) и один с тетраэдром. (Заметим, что тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида).







а) Угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 равен углу CAB_1 (т.к. $AC\parallel A_1C_1$) и равен 60° (ΔAB_1C – правильный).

б) Угол между прямыми A_1M и B_1N (M и N середины рёбер) равен углу C_1KA_1 $\left(C_1K\parallel B_1N\right)$: $D_1K = 2a,$ $C_1K = A_1K = a\sqrt{5},$ $A_1C_1 = a\sqrt{2},$ по теореме косинусов $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}.$

в) В тетраэдре $DABC$ точки A_1 è B_1 – середины рёбер AD è BD. Чтобы найти угол φ между скрещивающимися прямыми CB_1 è BA_1

проводят $B_1K \| BA_1$, тогда $\cos\varphi = \left|\cos\left(\angle KB_1C\right)\right|$. Косинус угла находят по теореме косинусов из треугольника KB_1C.

II. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Задача 2. В условиях задачи 1 найти расстояние от точки M до прямой B_1D.

Δ Предположим, что точка K лежит на прямой B_1D и $MK \perp B_1D$. Требуется найти длину отрезка MK. Пусть $(x; y; z)$ – координаты точки K. Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{B_1D}$, т.е. $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$.

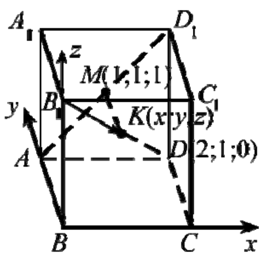


Рис. 2

Имеем: $B_1(0;0;2)$, $D(2;1;0)$, $\overrightarrow{B_1K}(x; y; z-2)$ и $\overrightarrow{B_1D}(2;1;-2)$. Из равенства, $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$, т.е. $(x; y; z-2) = \lambda(2;1;-2)$ следует $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z - 2 = -2\lambda$. Вектор $\overrightarrow{MK}(x-1; y-1; z-1)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{B_1D}(2;1;-2)$, их склярное произведение равно нулю, поэтому $2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0.$

Подставляем сюда $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2 - 2\lambda$, находим $\lambda = \frac{5}{9}$, тогда $K\left(\frac{10}{9}; \frac{5}{9}; \frac{8}{9}\right)$ и координаты вектора $\overrightarrow{MK}$ таковы: $x - 1 = 2\lambda - 1 = \frac{1}{9}$, $y - 1 = \lambda - 1 = -\frac{4}{9}$, $z - 1 = (2 - 2\lambda) - 1 = 1 - 2\lambda = -\frac{1}{9}$, $\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}\right)$. Определим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, (т.е. расстояние от точки M до прямой B_1D): $\left|\overrightarrow{MK}\right| = MK = \sqrt{\frac{16+1+1}{81}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Заметим, что также определено и положение точки K, известны её координаты и, например, можно найти $B_1K : B_1D = \frac{5}{9}$. ▲

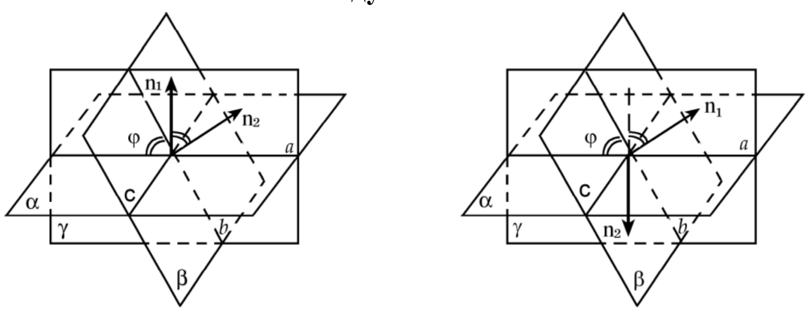
III. Уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью

В прямоугольной системе координат плоскость задаётся уравнением $ax+by+cz+d=0$, причём вектор $\vec{n}(a;b;c)$ перпендикулярен этой плоскости (*его называют нормалью к плоскости*).

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a;b;c)$ в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$ (здесь $M(x;y;z)$ – произвольная точка этой плоскости), а в координатной форме

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Угол между плоскостями



а) **б)**

Рис. 3

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Плоскость γ перпендикулярна прямой c и пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Угол между прямыми a и b называется углом между плоскостями α и β. Как и угол между прямыми, он лежит в диапазоне от 0 до $90°$. Угол между плоскостями либо равен углу между векторами, перпендикулярными плоскостям (рис. 3а), либо дополняет его до $180°$. В обоих случаях $\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|$. Итак, векторы $\vec{n}_1(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2,b_2,c_2)$ соответственно перпендикулярны плоскостям

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \text{ и } a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

угол между этими плоскостями определяется из равенства

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right| = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}\right|. \qquad (1)$$

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка M – середина ребра AB, точка K – середина ребра DD_1. Найти угол между плоскостями AKB_1 и KMC.

Δ Введём прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку A, как показано на рис. 4.

Составим уравнение плоскости AKB_1. Пусть оно имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (2)$$

Точка $A(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости, следовательно $d = 0$.

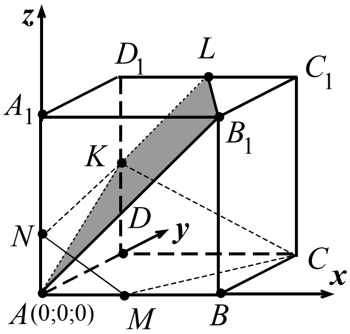


Рис. 4

Подставим координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$ и $B_1(1;0;1)$ в уравнение (2) при $d = 0$, получим $b + \frac{c}{2} = 0$ и $a + c = 0$.

Таким образом $b = -\frac{c}{2}$, $a = -c$ и уравнение (2) принимает вид $-cx - \frac{c}{2}y + cz = 0$.

Сокращая на c и умножая на (–2), приведём уравнение к виду $2x + y - 2z = 0$.

Составим уравнение плоскости KMC. Пусть оно имеет вид

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \qquad (3)$$

Подставляем координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ и $C(1;1;0)$, получаем систему: $b_1 + \frac{c_1}{2} + d_1 = 0$, $\frac{a_1}{2} + d_1 = 0$, $a_1 + b_1 + d_1 = 0$.

Вычтя из третьего уравнение второе, будем иметь $\frac{a_1}{2} + b_1 = 0$, т.е. $b_1 = -\frac{a_1}{2}$. Из второго уравнения следует $d_1 = -\frac{a_1}{2}$, тогда из первого уравнения получим $c_1 = 2a_1$. Уравнение (3) принимает вид $a_1 x - \frac{a_1}{2} y + 2a_1 z - \frac{a_1}{2} = 0$ или $2x - y + 4z = 1$.

Итак, $\vec{n}_1(2;1;-2)$, $|\vec{n}_1| = 3$, $\vec{n}_2(2;-1;4)$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{21}$ и угол между плоскостями AKB_1 и KMC находим из равенства

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right| = \left|\frac{-5}{3\sqrt{21}}\right|, \quad \varphi = \arccos\frac{5}{3\sqrt{21}}.$$

Заметим, что для определения угла между плоскостями координатным способом построение сечений не предусматривается. На рис. 4 сечения изображены для полноты картины. ▲

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой, наклонённой к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и её перпендикулярной проекцией на эту плоскость, он заключён в пределах от 0 до 90°. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°, если прямая и плоскость параллельны, угол между ними равен 0.

Пусть прямая a образует с плоскостью α угол φ (рис. 5), $\vec{a}$ – ненулевой вектор, лежащий на прямой a и пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ равен ψ. Либо $\varphi + \psi = 90^\circ$ (когда $0 \le \psi \le 90^\circ$), либо $\psi - \varphi = 90^\circ$ (когда $90^\circ < \psi \le 180^\circ$), но в обоих случаях $\sin\varphi = |\cos\psi|$, т.е.

$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right|.$$

Рис. 5

Итак, если вектор $\vec{n}(a;b;c)$ перпендикулярен плоскости α, то угол φ между этой плоскостью и прямой a, проходящей через точки A и B, определяется из равенства

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|. \qquad (4)$$

Задача 4. В условиях задачи 3 найти угол между прямой KM и плоскостью AKB_1.

Δ Плоскость AKB_1 в рассматриваемой системе координат имеет уравнение $2x+y-2z=0$, вектор $\vec{n}(2;1;-2)$, $|\vec{n}|=3$. На прямой KM рассмотрим вектор $\overrightarrow{KM}: K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left|\overrightarrow{KM}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Угол φ между прямой KM и плоскостью AKB_1 находим по формуле $\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{KM}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{KM}\right|}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. ▲

IV. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α параллельна плоскости β, прямая b лежит в плоскости β, точка B лежит на прямой b (рис. 6). Очевидно, что расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию от прямой b до плоскости α и равно расстоянию между плоскостями α и β.

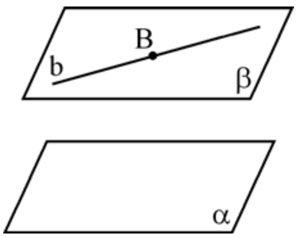


Рис. 6

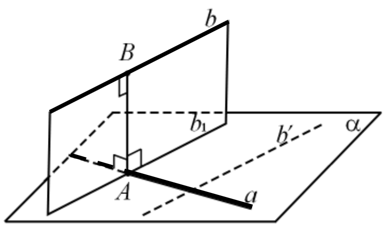


Рис. 7

Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b. Проведём через прямую a плоскость α, параллельную прямой b (рис. 7). Через прямую b проведём плоскость, перпендикулярную плоскости α, пусть линия пересечения этих плоскостей b_1 (эта прямая есть проекция прямой b на плоскость α). Точку пересечения прямых a и b_1 обозначим A. Точка A является проекцией некоторой точки B прямой b. Из того, что $AB\perp\alpha$ следует, что $AB\perp a$ и $AB\perp b_1$; кроме того, $b\|b_1$, значит $AB\perp b$. Прямая AB пересекает скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярна и той, и другой.

Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых a и b.

Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми и равна расстоянию от любой точки прямой b до плоскости α. Задача нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми не требует построения их общего перпендикуляра и совпадает с задачей определения расстояния от точки до плоскости.

Задача 5. Найти расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Δ

Пусть прямая, проходящая через точку M перпендикулярно плоскости α, пересекает её в точке K с координатами $(x;y;z)$. Вектор $\overrightarrow{MK}$ перпендикулярен плоскости α, как и вектор $\vec{n}(A;B;C)$, т.е. векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\vec{n}$ – коллинеарны, $\overrightarrow{MK}=\lambda\vec{n}$.

Так как $\overrightarrow{MK}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и $\vec{n}(A;B;C)$, то $x-x_0=\lambda A$, $y-y_0=\lambda B$, $z-z_0=\lambda C$.

Точка K лежит в плоскости α, её координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

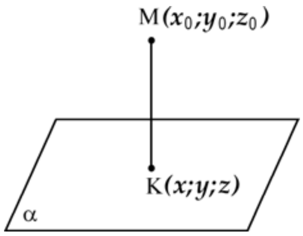


Рис. 8

Подставляем $x=x_0+\lambda A$, $y=y_0+\lambda B$, $z=z_0+\lambda C$ в уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, получаем

$$A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C(z_0+\lambda C)+D=0,$$

откуда $\lambda=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$.

Находим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, которая и равна расстоянию от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\lambda\vec{n}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Итак, расстояние h от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ таково

$$h = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (5)$$

Например, расстояние h от точки M (2;–3;1) до плоскости

$$x - 2y + 2z - 1 = 0$$

равно

$$h = \frac{\left|2 - 2(-3) + 2 \cdot 1 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3. \ \blacktriangle$$

Задача 6. Ребро куба равно a. Найти расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.

Δ Рассмотрим, например, прямые, на которых лежат диагонали AC и DC_1 граней куба (рис. 9).

Диагональ AB_1 грани AA_1B_1B параллельна прямой DC_1, поэтому прямая DC_1 параллельна плоскости AB_1C. Расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC равно расстоянию от прямой DC_1 до плоскости AB_1C и равно расстоянию от любой точки прямой DC_1 до плоскости AB_1C.

Введём прямоугольную систему координат с началом координат в точке A так, как показано на рис. 9 и вычислим координаты отмеченных точек.

Пусть уравнение плоскости AB_1C (будем также обозначать её α) $kx + by + cz + d = 0$ (не используем букву a, поскольку она обозначает ребро куба).

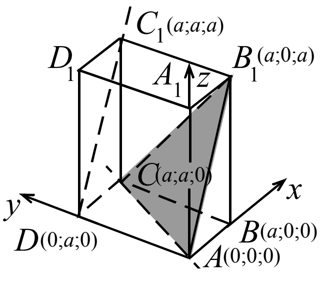


Рис. 9

$$A(0;0;0) \in \alpha \Rightarrow d = 0;$$

$$C(a;a;0) \in \alpha \Rightarrow ka + ba = 0 \Rightarrow b = -k;$$

$$B_1(a;0;a) \in \alpha \Rightarrow ka + ca = 0 \Rightarrow c = -k.$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнение плоскости: $kx - ky - kz = 0,$ сокращая на k, получаем $x - y - z = 0.$ Найдём расстояние h от точки $D(0;a;0)$ прямой DC_1 до этой плоскости по формуле (5):

$$h = \frac{|0 - a + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC.

Приведём другое решение этой задачи, другой метод определения расстояния от точки (прямой) до плоскости, не используя координаты, но простой и часто применяемый. Он основан на вычислении объёма треугольной пирамиды двумя способами. Рассмотрим треугольную пирамиду AB_1CD (рис. 9). Искомое расстояние от точки D до плоскости AB_1C равно высоте h этой пирамиды, опущенной из вершины D, поэтому для пирамиды AB_1CD её объём $V = \frac{1}{3}S_{AB_1C}h.$

Треугольник AB_1C правильный со стороной $a\sqrt{2}$, его площадь равна $\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Итак, $V = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2h.$

Объём V этой же пирамиды легко вычисляется, если в качестве основания рассмотреть грань ACD, так как $S_{ACD} = \frac{1}{2}a^2$, а высота пирамиды, опущенная из вершины B_1 на плоскость ACD, очевидно, равна $BB_1 = a.$ Находим $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2a = \frac{a^3}{6}.$

Из равенства $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h = \frac{a^3}{6}$ определяем $h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$ ▲

§2. Векторный метод решения задач стереометрии без использования прямоугольных координат

Напомним следующую теорему о векторах одной плоскости (теорема о разложении):

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, тогда для любого вектора $\vec{c}$, лежащего в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, существует единственная пара чисел x и y таких, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

□ Приведём векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ к одному началу – точке O, через конец вектора $\vec{c}$ проведём прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

(рис. 10), тогда $\overrightarrow{OA} = x\vec{a},\ \overrightarrow{OB} = y\vec{b},\ \ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$ т.е. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$ Если предположить, что возможно другое разложение $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b},$ то должно выполняться равенство $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = 0.$ Если $x - x_1 \neq 0,$ то $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}.$

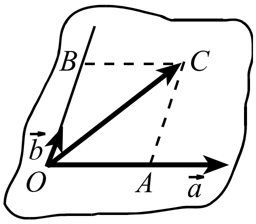


Рис. 10

Это означает коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что неверно, значит, $x - x_1 = 0.$ По той же причине $y - y_1 = 0.$ ■

Эта теорема верна и в том случае, когда векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны одной плоскости (также приводим их к общему началу).

Из теоремы о разложении следует: пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой, тогда для того, чтобы точка D лежала в плоскости $ABC,$ необходимо и достаточно, чтобы существовала пара чисел x и y такая, что $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 11).

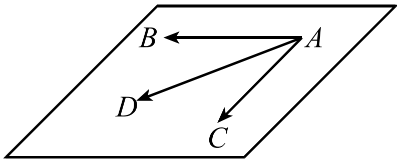


Рис. 11

Для применения векторного метода в пространстве нужны следующие две теоремы:

Теорема 1. Если векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от одной точки и не лежат в одной плоскости, то равенство $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ верно только при $x = y = z = 0.$

□ Например, если $z \neq 0,$ то $\vec{c} = -\dfrac{x}{z}\vec{a} - \dfrac{y}{z}\vec{b},$ что означает, что вектор $\vec{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}.$ Но это не так. Поэтому $z = 0.$ По той же причине $x = 0$ и $y = 0.$

Теорема 2 (о разложении). *Пусть три вектора $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости. Тогда для любого вектора $\vec{d}$ существует единственная тройка чисел $x,\ y,\ z$ таких, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$*

□ Отложим все четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, c$ и $\vec{d}$ от общей точки M (рис. 12). Векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ не лежат в одной плоскости, поэтому плоскости MAB, MAC, MBC различны. Если точка D попала на одну из них, например, на плоскость MAB, то $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е.

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c}.$$

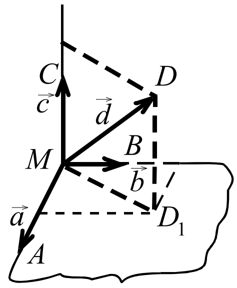


Рис. 12

Если же точка D не принадлежит ни одной из этих плоскостей, то проведём через точку D прямую, параллельную вектору $\overrightarrow{MC}$. Пусть D_1 – точка её пересечения с плоскостью MAB. По правилу сложения векторов $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD_1} + \overrightarrow{D_1D}$, по теореме о разложении на плоскости $\overrightarrow{MD_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$; из коллинеарности векторов $\overrightarrow{D_1D}$ и $\vec{c}$ следует $\overrightarrow{D_1D} = z\vec{c}$, поэтому

$$\vec{d} = \overrightarrow{MD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Предположение, что есть другое разложение $\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, приведёт к равенству

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0.$$

По предыдущей теореме это равенство возможно только лишь при $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Разложение единственно. ■

Задача 7. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма с основанием ABC. Доказать, что на прямых AB_1 и BC_1 есть такие точки M и N, что прямая MN параллельна прямой A_1C. Найти отношение $MN : A_1C$.

На рисунке призма похожа на прямую призму, но все наши действия не учитывают угол между боковым ребром и плоскостью основания.

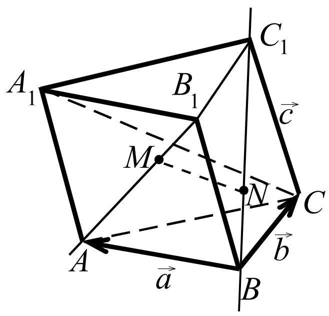


Рис. 13

Δ Пусть M – точка на AB_1, N – точка на BC_1 (рис. 13). Прямые MN и A_1C параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ коллинеарны, т.е. $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{A_1C}$. Разложим эти векторы по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$, не лежащим в одной плоскости. Имеем:

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec{c} - \vec{a},\ \overrightarrow{AM} \| \overrightarrow{AB_1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = x(\vec{c} - \vec{a});$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{BN} \| \overrightarrow{BC_1} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = y(\vec{b} + \vec{c});$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = -x(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{a} + y(\vec{b} + \vec{c}) = (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c};$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = -\vec{c} + (\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

Предположим, что точки M и N таковы, что $MN \| A_1C$, т.е. $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{A_1C}$, тогда имеет место равенство

$$(x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} - \lambda\vec{c}.$$

В силу единственности разложения вектора по трём векторам, не лежащим в одной плоскости, следует равенство коэффициентов разложения

$$x - 1 = -\lambda,\ y = \lambda,\ y - x = -\lambda.$$

Эта система имеет единственное решение $\lambda = \frac{1}{3},\ x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}$, значит прямая MN будет параллельна прямой A_1C только в том случае, когда $AM = \frac{2}{3}AB_1$ и $BN = \frac{1}{3}BC_1$. Из $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{A_1C}$ следует $\left|\overrightarrow{MN}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{A_1C}\right|$, т.е. $MN = \frac{1}{3}A_1C$, откуда $MN : A_1C = 1:3$. ▲

Задача 8. В условиях предыдущей задачи найти длину отрезка MN, если в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, $AB = BC = 2$, $\angle B = 90^\circ$, а ребро $BB_1 = 1$ и образует равные углы по $60°$ с рёбрами AB и BC.

Δ Данные задачи определяют длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и углы между ними, это позволяет вычислить скалярные произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ и $\vec{b}\cdot\vec{c}$. Имеем:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| = 1,$$

1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0;$

2) углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны 60°, поэтому

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos 60^\circ=1 \text{ и } \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 60^\circ=1.$$

Из решения задачи 7 известно разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{MN}=-\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}-\lambda\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}.$$

Так как $\left|\overrightarrow{MN}\right|^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{9}\left(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)=$

$$=\frac{1}{9}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=$$

$=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=1$, то $MN=\sqrt{\left|\overrightarrow{MN}\right|^2}=1$. ▲

Замечание. Если в условиях задач 7 – 8 требовалось бы найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1, то, расположив точки K и P на AB_1 и BC_1, надо разложить вектор $\overrightarrow{KP}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а затем использовать условия $KP\perp AB_1$ и $KP\perp BC_1$, которые равносильны условиям $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$ и $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$.

Задача 9. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC$ и $AD = DC$. Доказать, что рёбра AC и BD перпендикулярны.

Δ Выберем тройку векторов, не лежащих в одной плоскости:

$$\vec{a}=\overrightarrow{BA},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{BD}.$$

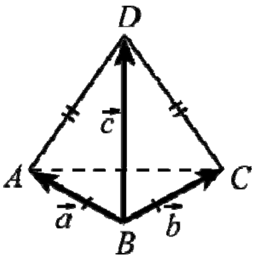


Рис. 14

Разложим векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ è $\overrightarrow{AN}$ по этим векторам:

$$\overrightarrow{AD}=\vec{n}-\vec{a};\ \overrightarrow{CD}=\vec{c}-\vec{b};$$

Известно, что $AB = BC$, т.е. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, и $AD = DC$, т.е. $|\vec{c}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|$. Требуется доказать, что $AC\perp BD$, т.е. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

Это означает, что надо установить, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Из $|\vec{c}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ следует $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2=\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2$,

$$\vec{c}^2-2\vec{a}\vec{c}+\vec{a}^2=\vec{c}^2-2\vec{b}\vec{c}+\vec{b}^2.$$

Учитывая, что $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ получаем $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$, т.е. $\vec{c}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$. Поскольку $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$ и $\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, т.е. $BD \perp AC$. ▲

Следствие. В правильной треугольной пирамиде, в частности, у правильного тетраэдра, противоположные рёбра перпендикулярны.

Задача 10. Точки M и N – середины рёбер тетраэдра $ABCD$ (рис. 15), точка P взята на ребре AD так, что $AP : AD = 2 : 3$. Найти, в каком отношении плоскость MNP делит ребро BC.

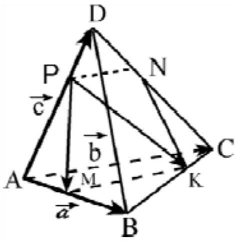


Рис. 15

Δ Пусть плоскость MNP пересекает ребро BC в точке K. Точка K лежит в плоскости MNP тогда и только тогда, когда существуют числа x и y такие, что

$$\overrightarrow{PK} = x\overrightarrow{PM} + y\overrightarrow{PN}. \qquad (5)$$

Выберем тройку векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$, разложим векторы $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PN}$ по этим векторам $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{c}$, тогда $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}$,

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{c},\ \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{c}\right),$$

поэтому $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}$.

Далее $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\vec{c}$,

а стоящий в этой сумме вектор $\overrightarrow{BK}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BC}$, т.е. $\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$.

Находим $\overrightarrow{PK} = -\frac{2}{3}\vec{c} + \vec{a} + \lambda\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = \left(1-\lambda\right)\vec{a} + \lambda\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.

Подставляя полученные выражения в (5), получим

$$\overrightarrow{PK} = \left(1-\lambda\right)\vec{a} + \lambda\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} = x\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\vec{a} + \frac{y}{2}\vec{b} - \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y\right)\vec{c}.$$

В силу единственности разложения вектора коэффициенты разложения равны, т.е. $1-\lambda=\frac{x}{2},\ \lambda=\frac{y}{2},\ \frac{2}{3}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y.$

Эта система имеет единственное решение $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3},\ \lambda=\frac{2}{3}.$ Значит, $\overrightarrow{BK}=\lambda\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},$ точка K лежит на ребре BC и делит его в отношении $BK : KC = 2 : 1$. ▲

§3. Сфера и многогранники

В прямоугольной системе координат сфера с центром в точке $C\ (x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

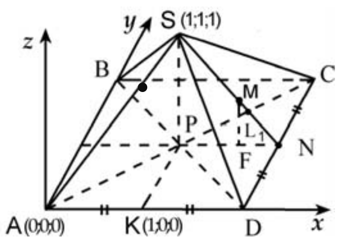


Рис. 16

Задача 11. $SABCD$ – правильная четырёхугольная пирамида. Найти радиус сферы, проходящей через вершину пирамиды S, середину ребра AD, точку M пересечения медиан грани CDS и вершину A, если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 1.

Δ В основании пирамиды лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, вершина S проектируется в центр основания (рис. 16). Введём прямоугольную систему координат, выбрав начало координат в точке A, совместив ось x с прямой AD, а ось y – с прямой AB.

Предположим, что уравнение сферы в этой системе координат имеет уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (6)$$

Ему удовлетворяют координаты точек $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $K\ (1;\ 0;\ 0)$ – середина стороны AD, $S\ (1;\ 1;\ 1)$ и точки M – точка пересечения медиан грани CDS. Если $CN = DN$, то SN – медиана треугольника CDS и $MN=\frac{1}{3}SN.$ Пусть $MF\|SP,$ тогда $\Delta\, MNF \sim \Delta\, SNP$ и $\frac{MF}{SP}=\frac{FN}{PN}=\frac{MN}{SN},$ откуда $FN=\frac{1}{3}PN=\frac{1}{3}$ и $MF=\frac{1}{3}SP=\frac{1}{3}.$ Итак, $M\left(\frac{5}{3};1;\frac{1}{3}\right).$

Подставим координаты точек A, K, S и M в уравнение (6), получим систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R_2; \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = R^2; \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = R^2; \\ \left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + (b-1)^2 + \left(c - \frac{1}{3}\right) = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдём $a = \frac{1}{2}$, вычитая из второго уравнения третье, получим $b + c = 1$, а вычитая из третьего четвёртое и подставляя $a = \frac{1}{2}$, получим $c = -\frac{1}{6}$. Итак, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{6}$, $c = -\frac{1}{6}$, из первого уравнения системы находим $R = \frac{\sqrt{59}}{6}$. ▲

Следует отметить, однако, что достаточно просто координатным методом решаются лишь некоторые задачи, а во многих случаях приходится геометрически определять положение центра.

I. Сфера описана около многогранника, если она проходит через каждую его вершину (многогранник вписан в сферу). Центр такой сферы равноудалён от вершин.

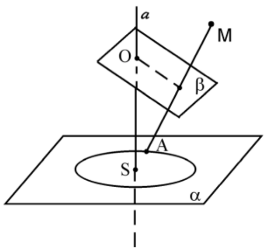


Рис. 17

Каждое ребро многогранника – хорда описанной сферы, поэтому *центр описанной сферы – точка пересечения плоскостей, проходящих перпендикулярно рёбрам через их середины.*

Каждая грань вписанного многогранника вписана в окружность – сечение сферы плоскостью этой грани. Перпендикуляр из центра сферы на плоскость её сечения проходит через центр окружности этого сечения.

Значит, *центр описанной сферы принадлежит всем перпендикулярам к граням, проведённым через центры описанных вокруг них окружностей.*

Докажем утверждение:

Если окружность лежит в плоскости α, а точка M не принадлежит этой плоскости, то через эту окружность и точку M можно провести сферу.

□ Геометрическое место точек, равноудалённых от всех точек окружности, есть прямая a, проходящая через центр окружности (рис. 17).

Геометрическое место точек, равноудалённых от точки M и некоторой точки A окружности, есть плоскость β, перпендикулярная отрезку MA и проходящая через его середину.

Прямая a и плоскость β не параллельны (иначе точка M лежала бы в плоскости α), они пересекаются. Их точка пересечения – точка O – равноудалена и от точки M, и от всех точек окружности. ■

Отсюда следует, что *около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность,* в частности

а) *около любой треугольной пирамиды можно описать сферу,*

б) *около правильной пирамиды можно описать сферу.*

Задача 12. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой, ребро DA перпендикулярно плоскости ABC (рис. 18). Найти радиус описанной около этого тетраэдра сферы, если $AD = BC = 3$, $AC = 4$.

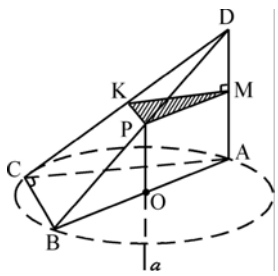


Рис. 18

Δ Центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, лежит на прямой a, перпендикулярной основанию ABC и проходящей через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Так как $\angle ACB = 90°$, то AB – диаметр этой окружности, и центр её – точка O – середина гипотенузы AB.

Центр сферы, проходящей через точки A и D лежит в плоскости, проходящей через середину M отрезка AD перпендикулярно ему.

Легко видеть, что эта плоскость и прямая a пересекается в середине ребра BD – точке P. Точка P – центр сферы, её радиус R равен $\frac{1}{2}BD$.

Находим: $BD^2 = AD^2 + AB^2 = AD^2 + (AC^2 + BC^2) = 34$, значит, $R = \frac{\sqrt{34}}{2}$. ▲

Задача 13. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC равно 6, ребро BD равно 8, все остальные рёбра равны $\sqrt{74}$ (рис. 19). Найти радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

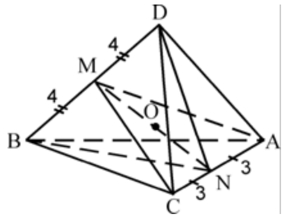


Рис. 19

Δ Пусть M и N – середины противолежащих рёбер BD и AC; треугольники ABC и ADC – равные равнобедренные с основанием AC, поэтому $AC \perp BN$, $AC \perp DN$. Отсюда следует, что плоскость BND перпендикулярна ребру AC и проходит через его середину, центр описанной сферы лежит в плоскости BND.

Треугольники BCD и BAD также равные равнобедренные с общим основанием BD, поэтому $CM \perp BD$, $AM \perp BD$, и плоскость CMA перпендикулярна ребру BD и проходит через его середину. Центр описанной сферы лежит в этой плоскости.

Плоскости BND и CMA пересекаются по прямой MN, центр O сферы лежит на этой прямой. Находим:

$$BN = ND = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{65}, \quad MN = \sqrt{BN^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 7.$$

Из прямоугольного треугольника MOD имеем: $MO = \sqrt{R^2 - MD^2} = \sqrt{R^2 - 16}$, а из прямоугольного треугольника NOC выражаем: $ON = \sqrt{R^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - 9}$, тогда из $MN = MO + ON$ следует $\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7$. Решая уравнение, находим $R = 5$.

Предположение о том, что точка O лежит не на отрезка MN, а на прямой MN вне его, приводит к одному из уравнений:

$$\sqrt{R^2 - 16} - \sqrt{R^2 - 9} = 7, \text{ либо } \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = 7.$$

Первое из них не имеет смысла ($\sqrt{R^2 - 16} < \sqrt{R^2 - 9}$), а второе не имеет решений. ▲

II. Биссектором *двугранного угла называется полуплоскость, которая принадлежит этому углу, имеет границей его ребро и разделяет угол на два двугранных угла равной величины.*

Будем рассматривать углы меньше развёрнутого.

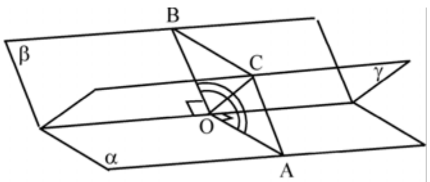


Рис. 20

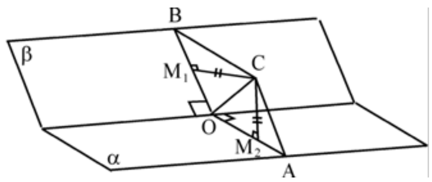


Рис. 21

Биссектриса каждого линейного угла данного двугранного угла принадлежит его биссектору (на рис. 20 биссектор γ содержит биссектрису OC линейного угла AOB). Привило построения биссектора: через ребро угла и биссектрису его линейного угла.

Как и у биссектрисы плоского угла, точки биссектора обладают свойством равноудалённости от граней двугранного угла.

Биссектор двугранного угла есть геометрическое место точек внутри этого угла, равноудалённых от плоскостей его граней (рис. 21).

III. Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней. *Центр вписанной сферы равноудалён от всех плоскостей граней на расстояние, равное радиусу.*

Следовательно, *центр вписанной сферы принадлежит биссекторам всех двугранных углов многогранника.* Обратно, если существует точка O, общая всем биссекторам, лежащая внутри многогранника, и она удалена от граней на расстояние r, то сфера с центром в точке O и радиуса r касается всех граней многогранника.

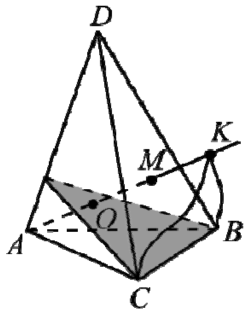


Рис. 22

В любой тетраэдр можно вписать сферу и только одну.

□ Пусть β_1 – биссектор двугранного угла с ребром AC, а β_2 – биссектор двугранного угла с ребром AB (рис. 22). Эти биссекторы имеют общую точку A, следовательно, пересекутся по некоторому лучу AK. Каждая точка этого луча лежит на β_1 и поэтому равноудалена от плоскостей ACB и ACD, лежит на β_2 равноудалена от плоскостей ABC и ABD. Значит каждая точка луча AK равноудалена от трёх граней: ABC, ACD и ABD и луч AK принадлежит биссектору двугранного угла при ребре AD.

Пусть луч AK пересекает грань BCD в точке M. Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссектор этого угла пересекает отрезок AM. Точка пересечения O лежит на луче AK и равноудалена от граней ABC, ACD, ABD. В то же время расстояния от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, так как точка O принадлежит биссектору двугранного угла, образованного этими плоскостями. Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, а сфера с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию от точки O до грани тетраэдра, вписана в тетраэдр. Точка O определяется единственным образом. ■

Задача 14. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой; ребро AD перпендикулярно плоскости ABC (рис. 23). Найти радиус вписанной сферы, если $AD = BC = 3$, $AC = 4$.

Δ По теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна плоскости ACD (т.к. DA – перпендикуляр к плоскости ABC, прямая BC перпендикулярна проекции AC, следовательно, она перпендикулярна наклонной DC; итак, $\angle BCD = 90°$, $\angle BCA = 90°$, следовательно прямая BC перпендикулярна плоскости ACD). Значит угол DCA – линейный угол двугранного угла при ребре BC и биссектор BCK проходит через биссектрису CK этого линейного угла. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе.

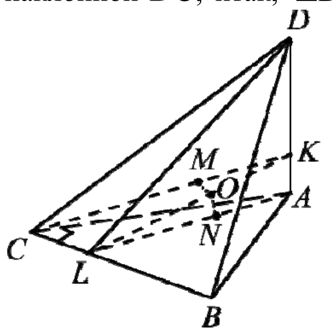


Рис. 23

Далее угол BAC – линейный угол двугранного угла при ребре AD, проводим его биссектрису AL, а затем биссектор ADL. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе, следовательно, центр сферы лежит на прямой LK пересечения биссекторов BCK и ADL внутри тетраэдра.

Пусть O – центр сферы, точка O лежит на LK, расстояния от точки O до основания ABC и до грани ACD равны (тогда расстояния от точки O до всех граней будут равны).

Если $ON \perp ABC$, то $ON \parallel DA$, следовательно точка N лежит на AL.

Если $OM \perp ACD$, то $OM \parallel BC$, значит точка M лежит на CK. Итак, $ON = OM$.

Из условия следует, что $\Delta CAD = \Delta ACB$, поэтому равны их биссектрисы соответственных углов ACD и CAB и они отсекают на равных сторонах AD и BC равные отрезки $AK = CL$. Отсюда следует, что $\Delta KCL = \Delta LAK$. Значит, $\angle CKL = \angle KLA$. Из этого равенства и из равенства $OM = ON$ следует, что $\Delta MOK = \Delta NOL$. Поэтому и $OK = OL$, т.е. $MO = \dfrac{1}{2} CL$.

Это и есть искомый радиус.

По свойству биссектрисы в треугольнике ABC биссектриса AL делит сторону BC в отношении $CL : BL = CA : BA = 4 : 5$. Отсюда

$$CL = \frac{4}{9}BC = \frac{4}{3} \text{ и } MO = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Пусть O – центр сферы. Рассмотрим четыре пирамиды с общей вершиной O и основаниями – гранями тетраэдра: ABC, ABD, ACD, BCD. Центр O одинаково удалён от всех граней пирамиды на расстояние r, равное радиусу вписанной сферы, т.е. у всех этих пирамид одинаковая высота, равная r. Сумма объёмов всех четырёх пирамид составляет

$$\frac{1}{3}r\left(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}\right) = \frac{1}{3}rS_n,$$

(S_n – площадь полной поверхности пирамиды $ABCD$) и равна объёму V самой пирамиды $ABCD$, т.е.

$$V = \frac{1}{3}rS_n, \text{ откуда } r = \frac{3V}{S_n}.$$

Объём пирамиды может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3}AD \cdot S_{ABC}.$$

Имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot AB = \frac{15}{2},$$
$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot AD = 6, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}DC \cdot BC = \frac{15}{2}.$$

Итак

$$S_n = 27, V = \frac{1}{3}AD \cdot S_{ABC} = 6, r = \frac{3V}{S_n} = \frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

Замечание. Формула $r = \dfrac{3V}{S_n}$ верна для любого описанного вокруг сферы радиуса r многогранника и пригодна для определения радиуса этой сферы.

Прямая и сфера могут располагаться тремя способами.
Пусть R – радиус сферы, OK – перпендикуляр из центра сферы на прямую a.

1) Прямая a не пересекает сферу, если $OK > R$.

2) Прямая a касается сферы, если $OK = R$ (прямая проходит через конец радиуса на сфере и перпендикулярна этому радиусу).

3) Прямая пересекает сферу в двух точках, если $OK < R$.

Секущие и касательные к сфере обладают такими же свойствами, как и к окружности, в частности:

а) *если две прямые пересекаются в точке S, и касаются сферы в точках K и L, то* $SK = SL$ (свойство касательных);

б) *если две прямые пересекаются в точке S, одна касается сферы в точке K, другая пересекает сферу в точках M и N, то* $SK^2 = SM \cdot SN$ (теорема о касательной и секущей);

в) *если две прямые пересекаются в точке S, одна из них пересекает сферу в точках M и N, другая – в точках P и Q, то* $SM \cdot SN = SP \cdot SQ$ (точка S может располагаться снаружи (***теорема о секущих***) или внутри сферы (***теорема о пересекающихся хордах***)).

§4. Объём тетраэдра

В §1 (задача 6) и в §3 (задача 14) уже обсуждались две формулы объёма тетраэдра.

1. $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где H – высота к основанию, и

2. $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{п}} \cdot r$, где r – радиус вписанной сферы, а $S_{\text{п}}$ – площадь полной поверхности тетраэдра.

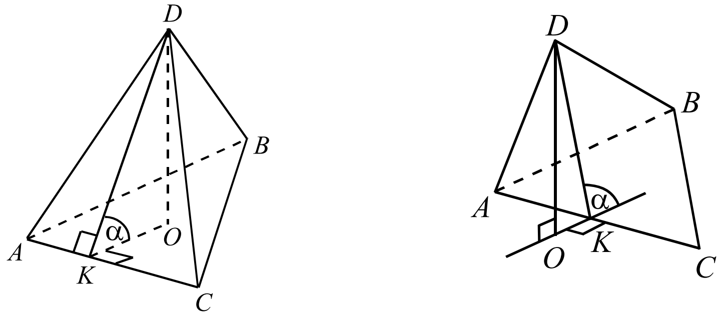
Первая из них, основная формула объёма, часто используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми (как в задаче 6 §1), расстояния между плоскостью и параллельной ей прямой или расстояния между двумя плоскостями.

Дадим краткий вывод еще двух формул объёма тетраэдра:

3. $V = \dfrac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \dfrac{\sin\alpha}{a}$, где S_1 и S_2 – площади двух граней, a – длина их общего ребра, α – величина двугранного угла между этими гранями.

4. $V=\frac{1}{6}\cdot a\cdot b\cdot\sin\varphi\cdot d,$ где a и b – длины противоположных рёбер тетраэдра, φ – угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти рёбра, d – расстояние между этими прямыми.

□ Рассмотрим тетраэдр $ABCD,$ в котором $AC=a,$ площади граней ABC и ADC равны S_1 и S_2 соответственно. Пусть вершина D проектируется в точку O плоскости основания ABC и $DK\perp AC$ (рис. 24). По теореме о трёх перпендикулярах $OK\perp AC$.



а) Рис. 24 б)

Угол DKO либо равен величине α двугранного угла между гранями ADC и ABC (рис. 24 а), либо $\angle DKO=180^\circ-\alpha$ (рис. 24 б). Если же точка O лежит на прямой AC, то плоскости ADC и ABC перпендикулярны друг другу, $\alpha=90^\circ$. Во всех случаях $DO=DK\cdot\sin\alpha$.

Так как $S_2=\frac{1}{2}AC\cdot DK,$ то

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DO=\frac{1}{3}S_1\cdot DK\cdot\sin\alpha=\frac{1}{3}S_1\frac{\frac{1}{2}AC\cdot DK}{\frac{1}{2}AC}\sin\alpha,$$

откуда $V=\frac{2}{3}S_1\cdot S_2\frac{\sin\alpha}{a}.$ ■

Для доказательства формулы 4 достроим тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое его ребро плоскость, параллельную противолежащему ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед, в котором рёбра исходного тетраэдра являются диагоналями граней (рис. 25).

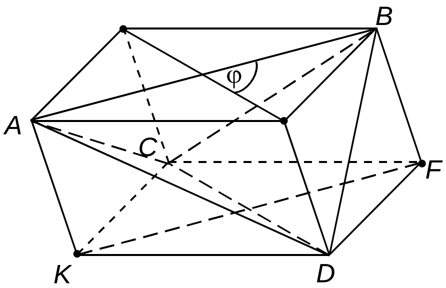


Рис. 25

□ За основание параллелепипеда примем грань с диагональю CD, его площадь обозначим S, тогда объём параллелепипеда $v = S \cdot d$, где d – расстояние между плоскостью основания и плоскостью параллельной ей грани.

Объём параллелепипеда равен сумме объёма тетраэдра V и объёма $4^{х}$ пирамид, в каждой из которых основание составляет половину площади S параллелограмма $KCFD$ и высота совпадает с высотой параллелепипеда.

Итак, $v = V + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot d \right) = V + \frac{2}{3} v,$ откуда $V = \frac{1}{3} v.$

Так как $v = S \cdot d = \left(\frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi \right) d,$ то

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi \cdot d = \frac{1}{6} ab \sin\varphi \cdot d,$$

где $AB = a, CD = b.$

Формула 4 особенно удобна в случае, когда противоположные рёбра тетраэдра (например, AB и CD) перпендикулярны друг другу.

Контрольные вопросы

В вопросах 1–8 рассматриваются точки $A(2;-2;-1),$ $B(10;-4;1)$ **и плоскость** $\alpha,$ **заданная уравнением** $8x + y - 4z - 63 = 0.$

1(2). Найти угол между прямой AB и плоскостью $\alpha.$

2(2). Составить уравнение плоскости β, проходящей через точку A и параллельной плоскости α. Найти расстояние между плоскостями α и β.

3(2). Составить уравнение плоскости γ, проходящей через точку A, B и начало координат. Найти угол между плоскостями α и γ.

4(2). Найти координаты точки A' – ортогональной проекции точки A на плоскость α.

5(2). Найти координаты точки A^*, симметричной точке A относительно плоскости α.

6(2). Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно плоскости α.

7(2). Составить уравнение сферы с центром в середине отрезка AB, касающейся плоскости α.

8(2). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AB.

9(4). Доказать, что 1) в правильном тетраэдре $ABCD$ противоположные рёбра AB и CD лежат на перпендикулярных скрещивающихся прямых; 2) отрезок MN, соединяющий середины этих рёбер, есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CD; 3) длина отрезка $MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$, если ребро тетраэдра равно a.

10(3). Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на лучах DA, DB и DC. Доказать, что отношение объёмов пирамид $DABC$ и $DA_1B_1C_1$ равно отношению $\frac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA_1 \cdot DB_1 \cdot DC_1}$.

11(3). Около сферы описан параллелепипед. Доказать, что площади всех его граней равны.

12*(3). Существует ли треугольная пирамида, в которой одна пара противолежащих рёбер равна 3, другая пара противолежащих рёбер равна 4, а третья пара равна 5?

Задачи

(задачи 1-4 из вариантов ЕГЭ, остальные из вариантов олимпиад различных вузов)

1(4). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=\sqrt{2}$ и $AC=\sqrt{6}$. Прямая A_1B образует угол 30° с плоскостью BB_1C_1C. Найти высоту призмы.

2(5). В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{10}$, $AD=3\sqrt{10}$. Высота параллелепипеда $AA_1=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Найти расстояние от точки A до плоскости A_1DB.

3(6). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=8$, $BC=6$. Все боковые рёбра пирамиды равны между собой и равны $\sqrt{46}$. Точка M – середина ребра SB, точка K – середина ребра SC. Найти угол между прямыми AM и BK.

4(7). Отрезок AB – диаметр сферы, точки C и D лежат на сфере так, что объём пирамиды $ABCD$ наибольший возможный. Найти $\sin$ угла между плоскостью ABC и прямой BP, где P – середина отрезка CD.

5(6). Даны координаты четырёх точек параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A_1(-1;0;1)$ – вершина, $C(-2;4;0)$ – вершина, $M\left(\dfrac{1}{2};2;1\right)$ – середина ребра DD_1, $O\left(-3;\dfrac{7}{2};1\right)$ – центр грани BB_1C_1C.

Найти координаты вершин параллелепипеда и расстояние от точки D_1 до прямой A_1C. (См. Задачу 2 на стр. 6 Задания).

6(6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 4, боковые рёбра равны 3. В боковых гранях ABS, BCS и CDS проведены соответственно биссектриса AK, медиана BM и высота CH. Найти объём треугольной пирамиды $SKMH$. (Используйте ответ на контрольный вопрос № 10).

7(6). Точки K и L лежат соответственно на рёбрах AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром a, $AK=\frac{1}{5}a$, $CL=\frac{2}{5}a$. Найти длину отрезка KL. (Используйте ответ на контрольный вопрос №9).

8(7). В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4, ребра SA è SB равны, а $SC=3$. Сфера касается сторон основания плоскости SAB и ребра SC. Найти радиус сферы.

9(7). В треугольной пирамиде $SABC$ угол между гранями ABC и ABS равен 45°, плоский угол ABC равен 30°, рёбра AB и SB перпендикулярны. Объём пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$, $SB=\sqrt{2}, BC=2.$ Найти радиус описанной сферы.

10(7). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB=6+\sqrt{2}$, $AD=6-\sqrt{2}$ и $AA_1=6$ расположены две сферы: первая касается граней $ABCD$, ABB_1A_1, ADD_1A_1; вторая сфера, радиус которой в 2 раза больше радиуса первой, касается первой сферы и касается граней C_1CBB_1, $C_1B_1A_1D_1$, C_1CDD_1. Найти радиусы этих сфер.

11*(6). Около сферы радиуса $R=6$ описан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В основании лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5\sqrt{6}$. Ребро AA_1 образует равные острые углы с рёбрами AB и AD. Определить: а) косинус угла наклона ребра AA_1 к плоскости основания и б) расстояние от вершины A до центра сферы O. (Используйте ответ на контрольный вопрос № 11).

12*(6). Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB = 2, CD = \frac{1}{2}$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.