§4. Объём тетраэдра

В §1 (задача 6) и в §3 (задача 14) уже обсуждались две формулы объёма тетраэдра.

1. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где H – высота к основанию, и

2. $V = \frac{1}{3} S_{\text{п}} \cdot r$, где r – радиус вписанной сферы, а $S_{\text{п}}$ – площадь полной поверхности тетраэдра.

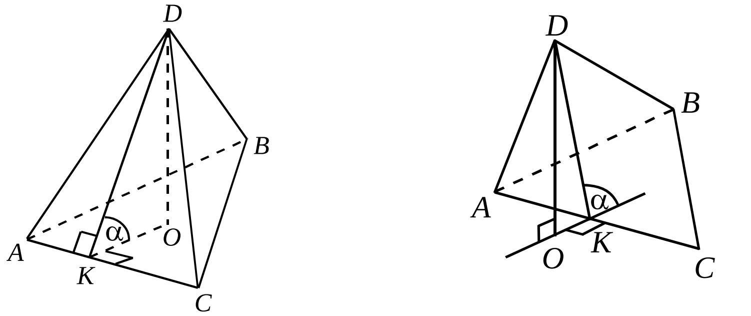
Первая из них, основная формула объёма, часто используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми (как в задаче 6 §1), расстояния между плоскостью и параллельной ей прямой или расстояния между двумя плоскостями.

Дадим краткий вывод еще двух формул объёма тетраэдра:

3. $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin\alpha}{a}$, где S_1 и S_2 – площади двух граней, a – длина их общего ребра, α – величина двугранного угла между этими гранями.

4. $V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot d$, где a и b – длины противоположных рёбер тетраэдра, φ – угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти рёбра, d – расстояние между этими прямыми.

□ Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором $AC = a$, площади граней ABC и ADC равны S_1 и S_2 соответственно. Пусть вершина D проектируется в точку O плоскости основания ABC и $DK \perp AC$ (рис. 24). По теореме о трёх перпендикулярах $OK \perp AC$.



а) **Рис. 24** **б)**

Угол DKO либо равен величине α двугранного угла между гранями ADC и ABC (рис. 24 а), либо $\angle DKO = 180^\circ - \alpha$ (рис. 24 б). Если же точка O лежит на прямой AC, то плоскости ADC и ABC перпендикулярны друг другу, $\alpha = 90^\circ$. Во всех случаях $DO = DK \cdot \sin\alpha$.

Так как $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot DK$, то

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} S_1 \cdot DK \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3} S_1 \frac{\frac{1}{2} AC \cdot DK}{\frac{1}{2} AC} \sin\alpha,$$

откуда $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin\alpha}{a}$. ■

Для доказательства формулы 4 достроим тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое его ребро плоскость, параллельную противолежащему ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед, в котором рёбра исходного тетраэдра являются диагоналями граней (рис. 25).

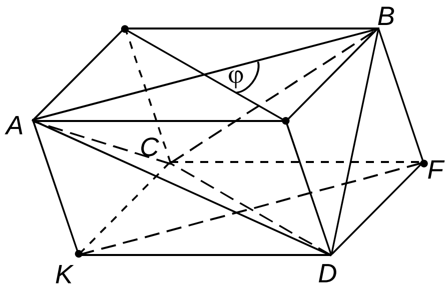


Рис. 25

□ За основание параллелепипеда примем грань с диагональю CD, его площадь обозначим S, тогда объём параллелепипеда $v = S \cdot d$, где d – расстояние между плоскостью основания и плоскостью параллельной ей грани.

Объём параллелепипеда равен сумме объёма тетраэдра V и объёма $4^{\text{х}}$ пирамид, в каждой из которых основание составляет половину площади S параллелограмма $KCFD$ и высота совпадает с высотой параллелепипеда.

Итак, $v = V + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot d\right) = V + \frac{2}{3} v$, откуда $V = \frac{1}{3} v$.

Так как $v = S \cdot d = \left(\frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi\right) d$, то

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi \cdot d = \frac{1}{6} ab \sin\varphi \cdot d,$$

где $AB = a, CD = b.$

Формула 4 особенно удобна в случае, когда противоположные рёбра тетраэдра (например, AB и CD) перпендикулярны друг другу.