§ 2. Вписанные и описанные четырёхугольники

Четырёхугольник называется *вписанным* в окружность, если окружность проходит через все его вершины.

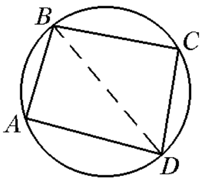


Рис. 14

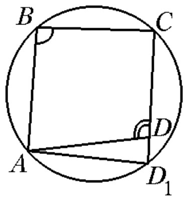
Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 14). Вписанные углы A и C опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогично, $\angle B + \angle D = 180°$.

Итак, если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма противолежащих углов равна $180°$.

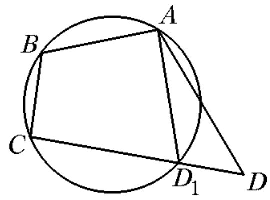
Верно и обратное: если сумма противолежащих углов четырёхугольника равна $180°$, то около этого четырёхугольника можно описать окружность. Докажем это.

▷ Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$. Проведём через вершины A, B и C окружность. Требуется показать, что четвёртая вершина D не может лежать ни внутри, ни вне этой окружности.

Допустим, что точка D лежит внутри окружности (рис. 15а). Продолжим сторону CD до пересечения с окружностью, получим точку D_1. Четырёхугольник $ABCD_1$ вписан в окружность, следовательно, $\angle B + \angle D_1 = 180°$. По условию $\angle B + \angle D = 180°$, поэтому $\angle D = \angle D_1$.



а)



б)

Рис. 15

Но $\angle D$ – внешний угол для треугольника ADD_1, внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного. Значит, предположение неверно, точка D не может лежать внутри окружности. Совершенно аналогично доказывается, что точка D не может лежать и вне окружности (рис. 15б). Следовательно, точка D должна лежать на окружности. ◁

1. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм есть прямоугольник.

Действительно, если $ABCD$ – параллелограмм, то его противолежащие углы равны: $\angle A = \angle C$. Если этот параллелограмм вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180°$, значит, $\angle A = \angle C = 90°$. Аналогично $\angle B = \angle D = 90°$, $ABCD$ – прямоугольник. Обратное утверждение очевидно.

2. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Это следует из того, что сумма углов трапеции (рис. 16), прилежащих к боковой стороне, равна $180°$ (как сумма внутренних односторонних при параллельных прямых): $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Около нее можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна $180°$: $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Отсюда следует, что равны вписанные углы, опирающиеся на боковые стороны, и, следовательно, равны и сами стороны.

Задача 8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 3 (рис. 17). Сторона AD является диаметром окружности, $CD = 4$. Стороны AB и BC равны. Найти эти стороны.

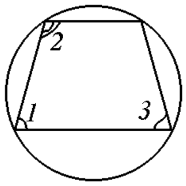


Рис. 16

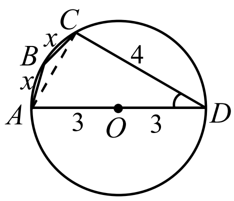


Рис. 17

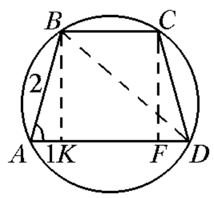


Рис. 18

▷ Неизвестные стороны обозначим x, угол ADC обозначим φ. Четырёхугольник вписан в окружность, значит, $\angle B = 180° - \varphi$. Проведём диагональ AC. Угол ACD опирается на диаметр, он прямой. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\cos\varphi = 2/3$, $AC = AD\sin\varphi = AD\sqrt{1-\cos^2\varphi} = 2\sqrt{5}.$ Из треугольника ABC по теореме косинусов будем иметь

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos(180° - \varphi),$$

откуда, учитывая, что $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi$, получим $20 = 2x^2 + 2x^2\cos\varphi$. Подставляем сюда значение $\cos\varphi = 2/3$ и находим $x = \sqrt{6}.$ ◁

Задача 9. Основания равнобокой трапеции равны 1 и 3, боковые стороны равны 2 (рис. 18). Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

▷ Трапеция равнобокая. Если $BK \perp AD$ и $CF \perp AD$, то по свойству трапеции $AK = FD = (AD - BC)/2 = 1.$ В прямоугольном треугольнике ABK гипотенуза AB в два раза больше катета AK, следовательно, $\angle ABK = 30°$ и $\angle BAK = 60°$. Около равнобокой трапеции можно описать окружность. <u>Эта окружность описана и около треугольника ABD</u>. Радиус R этой окружности выражается через угол и противолежащую сторону по формуле $\underline{R = a/2\sin A}$. Найдём

$a = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos 60°} = \sqrt{7}.$ Следовательно, $R = a/2\sin A = \sqrt{7/3}.$ ◁

Четырёхугольник называется *описанным* около окружности, если окружность касается всех его сторон.

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 19). Точки касания окружностью сторон четырёхугольника обозначим M, N, P, Q. По свойству касательных: $AM = AN$, $BP = NB$, $MD = QD$, $PC = CQ$. Складывая эти равенства, получим: $AM + MD + BP + PC = AN + NB + CQ + QD$, что означает $AD + BC = AB + CD$. Итак, **если четырёхугольник описан около окружности, то суммы противолежащих сторон равны.**

Докажем, что справедливо и такое утверждение: **если в выпуклом четырёхугольнике суммы длин противолежащих сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.**

▷ Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AD + BC = AB + CD$. Если докажем, что существует единственная точка, равноудалённая от всех сторон четырёхугольника, то эта точка, очевидно, будет центром окружности, касающейся всех сторон четырёхугольника. Положим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. По условию $a + c = b + d$, что равносильно $c - b = d - a$. Пусть $d > a$. Отложим на большей стороне CD меньшую сторону $DM = a$ (рис. 20). Так

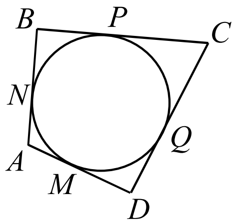


Рис. 19

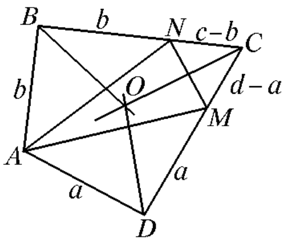


Рис. 20

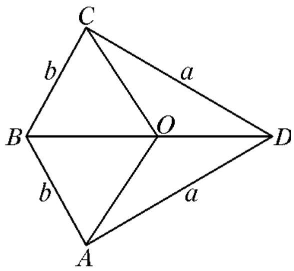


Рис. 21

как в этом случае $c > b$, то также отложим $BN = b$. Получим три равнобедренных треугольника ABN, ADM, MCN.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, отсюда следует, что если провести биссектрисы углов B, C, D трапеции, то они разделят пополам соответственно отрезки AN, AM, MN и будут им перпендикулярны. Это означает, что эти биссектрисы будут серединными перпендикулярами трёх сторон треугольника AMN, а они по теореме пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от сторон AB и BC (лежит на OB), CD и AD (лежит на OD) и BC и CD (лежит на OC), следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырёх сторон четырёхугольника $ABCD$.

Если $d = a$, то $c = b$ (рис. 21), биссектрисы углов B и D лежат на одной прямой (перпендикулярны AC и проходят через середину AC), и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD. Пусть биссектриса угла C пересекает BD в точке O, тогда (в силу симметрии) AO – биссектриса угла A, и, следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырёх сторон, и в этот четырёхугольник можно вписать окружность ч.т.д. ◁

Задача 10. Равнобокая трапеция с основаниями a и b $(a > b)$ описана около окружности. Найти 1) радиус окружности и 2) косинус угла при большем основании.

▷ Пусть в равнобокой трапеции $ABCD$ $BC = b$, $AD = a$ (рис. 22). Эта трапеция равнобокая, $AB = CD$; она описана около окружности, следовательно, $AB + CD = AD + BC$. Отсюда получаем: $AB = CD = (a+b)/2$. Проведём BM и CN перпендикулярно AD. Трапеция равнобокая, углы при основании равны, следовательно, равны и треугольники ABM и DCN и $AM = ND$.

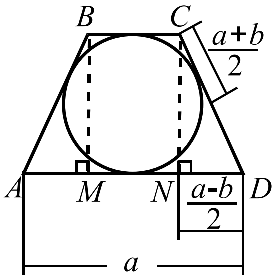


Рис. 22

По построению $MBCN-$ прямоугольник, $MN = BC = b$, поэтому $AM = (AD - BC)/2 = (a-b)/2$. Из прямоугольного треугольника ABM находим

$$\cos A = \frac{AM}{AB} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{и}$$

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{ab}/2$. ◁