Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

ФИЗИКА

Движение материальной точки по окружности

Задание №6 для 9-х классов

(2008-2009 учебный год)

г. Долгопрудный, 2009

Составитель: В.И. Плис, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №6 для 9-х классов (2008-2009 учебный год). - М.: МФТИ, 2009, 24с.

Дата присылки заданий по физике и математике - 15 мая 2009г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звездочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Плис Валерий Иванович
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 19.03.09
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 1400. Заказ №19-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Кинематика движения точки по окружности

1.1. Линейная и угловая скорости

Важным частным случаем движения материальной точки по заданной траектории является движение по окружности. Рассмотрим движение материальной точки M по окружности радиуса R с центром в точке O.

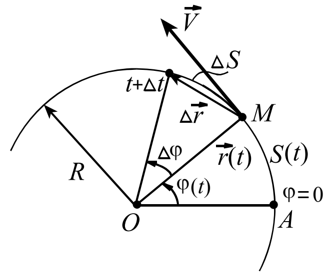


Рис. 1

В произвольный момент времени t положение точки на окружности однозначно определяется углом $\varphi(t)$, который радиус-вектор $\vec{r}(t)$ точки M образует с направлением начала отсчёта углов (рис.1). Таким направлением будем считать направление OA. Другим способом задания положения точки на окружности является задание длины $S(t)$ дуги AM. Оба способа задания положения точки на окружности эквивалентны, так как угловая $\varphi(t)$ и дуговая $S(t)$ координаты связаны определением радианной меры угла $\varphi(t)=\dfrac{S(t)}{R}$.

Рассмотрим перемещение $\Delta\vec{r}=\vec{V}\Delta t$ точки M при движении по окружности за малый промежуток времени Δt. Это перемещение стягивается дугой длиной $\Delta S\approx\left|\Delta\vec{r}\right|=\left|\vec{V}\right|\Delta t$, а радиус-вектор точки M поворачивается при этом на угол $\Delta\varphi$. На такой же угол поворачивается и вектор скорости, *так как скорость* $\vec{V}$ *перпендикулярна* $\vec{r}-$радиусу – вектору точки, т.к. направлена по касательной к окружности.

Линейной скоростью $V(t)$ точки называют отношение длины ΔS дуги ко времени Δt перемещения (при $\Delta t\to 0$)

$$V(t)=\frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1}$$

Линейная скорость точки есть модуль (величина) вектора скорости. В системе СИ линейную скорость измеряют в м/с (метр в секунду).

Угловой скоростью $\omega(t)$ радиуса-вектора точки называют отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот был совершен (при $\Delta t\to 0$),

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2}$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости точки, так как линейная скорость $\vec{V} \perp \vec{r}$ – радиусу-вектору точки. В системе СИ угловую скорость измеряют в рад/с (радиан в секунду).

Следует отметить, что в учебных пособиях угловую скорость радиуса-вектора точки часто называют просто угловой скоростью, а в качестве единицы измерения угловой скорости указывают $1/c$ (обратную секунду, $с^{-1}$): последнее обусловлено тем, что радиан – величина безразмерная.

Замечая, что $\Delta\varphi(t) = \dfrac{\Delta S(t)}{R}$, приходим с учётом (1) и (2) к соотношению, связывающему линейную $V(t)$ и угловую $\omega(t)$ скорости при произвольном движении материальной точки по окружности радиуса R

$$V(t) = \omega(t) \cdot R. \tag{3}$$

1.2. Равномерное движение по окружности. Период и частота обращения

Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью называют равномерным движением по окружности. Из (3) следует, что при таком движении угловая скорость ω тоже постоянна. В этом случае её называют также циклической частотой.

Для описания равномерного движения по окружности наряду с циклической частотой ω удобно использовать *период обращения* T, определяемый как время, в течение которого совершается один полный оборот, и *частоту* ν *обращения* $\nu = \dfrac{1}{T}$, которая численно равна числу оборотов радиуса-вектора точки за единицу времени. В связи с этим говорят, что частота ν измеряется в оборотах в секунду.

Из определения (2) угловой скорости следует, что при равномерном движении по окружности величины ω, T и ν связаны соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{4}$$

Размерности ω и ν одинаковы (1/с), так как эти величины различаются лишь числовым множителем 2π.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих применение введённых величин.

Пример 1. Считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R = 150$ млн.км, найдите линейную скорость V Земли в её годичном движении вокруг Солнца.

Решение. Будем считать, что Земля совершает один полный оборот вокруг Солнца за 365 суток. Тогда период обращения Земли $T = 3{,}15 \cdot 10^7$ с. Далее из (3) и (4) находим

$$V = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2 \cdot 3{,}14}{3{,}15 \cdot 10^7} \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 30 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Пример 2. Рельсы игрушечной железной дороги образуют кольцо радиуса R. Вагончик M перемещается по рельсам, подталкиваемый стержнем AB, который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг точки A, лежащей внутри кольца почти у самых рельсов (рис. 2). Как зависит от времени линейная скорость $V(t)$ вагончика? Считайте $0 \le \varphi_1 < \pi/2$.

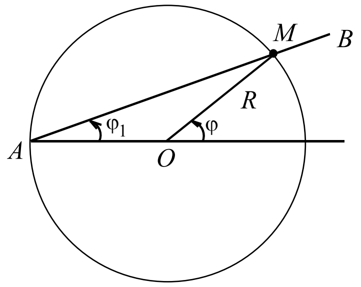


Рис. 2

Решение. Будем считать, что угол φ_1 отсчитывается от направления, задаваемого радиусом AO (точка O – центр окружности, по которой движется вагончик). Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_1, следовательно угол φ_1 растёт со временем по линейному закону $\varphi_1 = \omega_1 t$. Найдём зависимость от времени t угла φ поворота радиуса-вектора вагончика. Для этого заметим, что треугольник AOM равнобедренный, тогда $\angle AMO = \varphi_1$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним несмежных, отсюда $\varphi = 2\varphi_1 = 2\omega_1 t$. Заметим, что угол $\varphi(t)$ растёт со временем по линейному закону, и что угловая скорость ω вагончика при движении по рельсам постоянна и вдвое больше угловой скорости ω_1, с которой вращается стержень, т.е. $\omega = 2\omega_1$. Следовательно, вагончик движется по окружности равномерно, его линейная скорость от времени не зависит и равна

$$V = \omega \cdot R = 2 \cdot \omega_1 \cdot R.$$

1.3. Ускорение при равномерном движении по окружности

По определению ускорение $\vec{a}$ материальной точки есть векторная величина, равная отношению приращения вектора скорости ко времени, за которое произошло это приращение,

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t \to 0\text{)}. \qquad (5)$$

Найдём величину и направление ускорения $\vec{a}$ точки при равномерном движении по окружности. Допустим, что при этом движении радиус-вектор точки за время от t до $t + \Delta t$ совершил поворот на угол $\Delta\varphi$ (рис. 3). Из равнобедренного треугольника, иллюстрирующего соотношение $\Delta\vec{V} = \vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)$, найдём величину приращения вектора скорости, обусловленного только изменением направления (вращением) вектора скорости

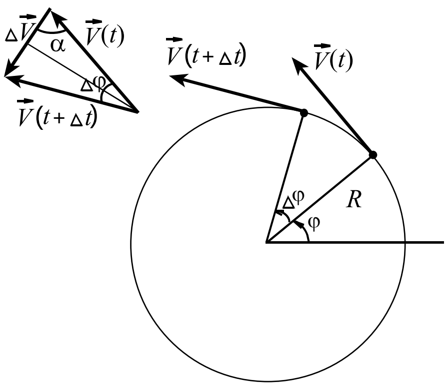


Рис. 3

$$\left|\Delta\vec{V}\right| = 2 \cdot V \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx V \cdot \Delta\varphi,$$

здесь учтено, что при малых аргументах, т.е. при $|x| << 1$ выполняется приближённое равенство $\sin x \approx x$, где x выражен в радианной мере. Тогда из соотношения (5) находим величину a вектора ускорения точки при равномерном движении по окружности $a = \left|\vec{a}(t)\right| = \dfrac{\left|\Delta\vec{V}\right|}{\Delta t} = \dfrac{V \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = V \cdot \omega.$

С учётом (3) и (4) последнее соотношение можно также представить в виде

$$a = \omega \cdot V = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot R. \qquad (6)$$

Установим направление вектора $\vec{a}$. Из (5) следует, что ускорение $\vec{a}$ и приращение $\Delta\vec{V}$ скорости – сонаправленные векторы. При $\Delta t \to 0$

угол $\Delta\varphi \to 0$ и $\alpha = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \to \dfrac{\pi}{2}$ следовательно в любой момент времени векторы $\vec{V}$ и $\vec{a}$ взаимно перпендикулярны, при этом вектор ускорения направлен по радиусу к центру окружности и с радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ точки связан соотношением (рис. 4)

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t). \qquad (7)$$

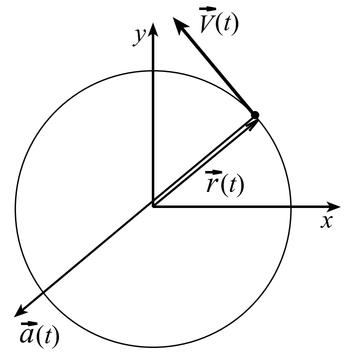


Рис. 4

Так как вектор ускорения направлен к центру окружности, то такое ускорение называют центростремительным (радиальным, нормальным, т.е. направленным по внутренней нормали к траектории). Подчеркнём, что величина центростремительного ускорения (как видно из вывода) связана с угловой скоростью вращения вектора скорости.

Сформулируем вывод, *движение точки по окружности с постоянной по величине скоростью есть движение ускоренное, при этом вектор ускорения в любой момент времени направлен к центру окружности, а его величина постоянна и определяется из* (6).

Пример № 3. Найдите скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точек земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$, обусловленные участием в суточном вращении Земли. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Выберем указанную на рис. 5 систему отсчёта. Начало отсчёта поместим в центр Земли, плоскость XY совпадает с плоскостью экватора, ось Z совпадает с осью вращения планеты. В выбранной системе отсчёта любая точка земной поверхности на широте φ движется равномерно по окружности радиуса $r = R\cos\varphi$ (на рисунке 5 показана пунктиром) с периодом в одни сутки, т.е. $T = 86400$ с. Скорость любой точки направлена по касательной к такой окружности, а ускорение к её центру. Величины векторов скорости и ускорения найдём из (3) и (6)

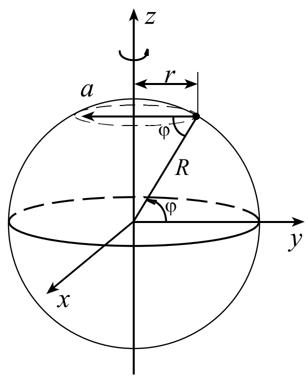


Рис. 5

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} \approx 230\,\text{м/с}, \quad a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi \approx 0{,}017\,\text{м/с}^2.$$

1.4. Ускорение при неравномерном движении по окружности

При неравномерном движении по окружности изменяется со временем не только направление вектора $\vec{V}$ скорости, но и его модуль V. В этом случае приращение $\Delta\vec{V}$ вектора скорости (рис. 6) может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих $\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_\tau + \Delta\vec{V}_n$, где $\Delta\vec{V}_\tau$ – составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости $\vec{V}$, и обусловленная приращением величины вектора скорости на $\Delta V_\tau = \Delta V = \left|\Delta\vec{V}\right|\cos\theta$; вторая составляющая $\Delta\vec{V}_n$ – нормальная (нами уже изучена), обусловлена (как и прежде) поворотом вектора скорости. Тогда естественно и ускорение представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих

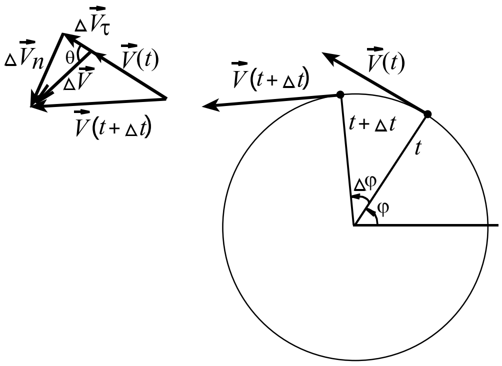


Рис. 6

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{V}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{8}$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения

$$a_\tau = \frac{\Delta V}{\Delta t}, (\Delta t \to 0), \;\; a_n = \omega \cdot V = \frac{V^2}{R}. \tag{9}$$

Отметим, что касательная составляющая a_τ ускорения определяется скоростью изменения модуля вектора скорости, в свою очередь нормальная (радиальная) составляющая a_n связана с угловой скоростью вращения вектора скорости. По теореме Пифагора

$$a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{10}$$

Отметим, что движение по произвольной криволинейной траектории может быть представлено как последовательность перемещений *по элементарным дужкам окружностей. Тогда соотношения* (9), (10) *справедливы и при неравномерном движении материальной точки по произвольной криволинейной траектории, при этом величину* R *в формуле* (9) *для* a_n *называют радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке. Иначе говоря, это радиус элементарной дужки окружности, с которой в первом приближении совпадает траектория материальной точки в малой окрестности того места, где эта точка в данный момент находится.*

В заключение отметим, что при неравномерном движении по окружности угловая скорость ω зависит от времени. Скорость изменения ω со временем называют угловым ускорением ε, которое вводится по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t \to 0\text{)}. \qquad (11)$$

Если угловое ускорение постоянно, то зависимость угла поворота радиуса-вектора от времени (по аналогии с кинематикой равнопеременного движения по прямой) принимает вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Из (9) и (11) следует, что тангенциальная составляющая a_τ ускорения материальной точки и угловое ускорение ε связаны соотношением

$$a_\tau = \frac{\Delta V}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon. \qquad (12)$$

Пример № 4. Материальная точка движется по окружности радиуса R с постоянным угловым ускорением ε. Найдите зависимости от времени величин скорости V и ускорения a. В начальный момент времени точка покоилась.

Решение. Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость будет увеличиваться со временем по линейному закону

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \varepsilon \cdot t. \qquad (13)$$

Из (3) с учётом (13) находим $V(t) = R \cdot \omega(t) = R \cdot \varepsilon \cdot t$.

Далее из соотношений (9), (12) и (13) находим проекции вектора ускорения на направления: тангенциальное $a_\tau = R \cdot \varepsilon$, нормальное $a_n = \omega^2 R = (\varepsilon \cdot t)^2 R$, и величину (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \varepsilon \cdot R \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Пример № 5. Камень брошен со скоростью V_0 под углом α к горизонту. В малой окрестности точки старта найдите радиус R кривизны траектории и угловую скорость ω вращения вектора скорости.

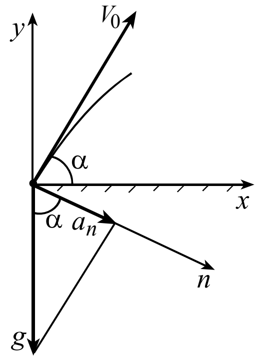


Рис. 7

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношениями

$$R = \frac{V^2}{a_n}, \qquad \omega = \frac{a_n}{V}. \qquad \text{(см. (9))}.$$

В малой окрестности точки старта (рис. 7) $V = V_0$, нормальное ускорение a_n есть проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на нормаль к траектории $a_n = g \cdot \cos\alpha$. Из приведённых соотношений находим $R = \dfrac{V_0^2}{g\cos\alpha}$, $\quad \omega = \dfrac{g\cos\alpha}{V_0}$.

§2. Динамика движения по окружности

В инерциальной системе отсчёта основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\,. \tag{14}$$

Рассмотрим подробнее *равномерное движение тела по окружности*, лежащей в плоскости *XOY* координатной системы. Из (7) и (14) следует, что при таком движении сумма сил, так же как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в (14) к скалярной форме записи, удобно перейти не к проекциям сил и ускорения на оси OX, OY инерциальной системы отсчета, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению

$$m a_n = m\frac{V^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \ldots\,. \tag{15}$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости XOY. Тогда $a_z = 0$ и из (14) находим, что сумма проекций сил на направление *OZ*, перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \ldots\,. \tag{16}$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1. в инерциальной системе отсчёта привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,
2. составить уравнения (14) – (16) и решить полученную систему.

Отметим, что из (15) следует – *произведение массы тела на нормальное* (*радиальное, центростремительное*) *ускорение равно сумме нормальных проекций всех действующих на тело сил.* Эту сумму, стоящую в правой части (15), часто неудачно называют центростремительной силой. Из (14) видно, что никакой центростремительной силы в природе не существует. В инерциальной системе отсчёта движение по окружности всегда происходит под действием сил, обусловленных известными взаимодействиями. Такими силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры и т.д.

Пример № 6. Период обращения Луны вокруг Земли в геоцентрической системе отсчёта равен $T = 27{,}32$ суток. Зная радиус Земли $R = 6400\,\text{км}$ и ускорение свободного падения у её поверхности $g = 10\,\text{м/с}^2$, найдите расстояние r до Луны.

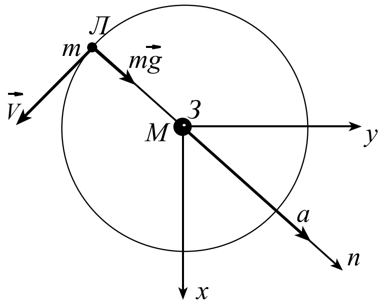


Рис. 8

Решение. Будем считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса r под действием силы притяжения к Земле. Тогда из второго закона Ньютона (рис. 8) $m\vec{a} = m\vec{g}(r)$, переходя к проекциям силы притяжения и ускорения на нормальное направление, получаем

$$m\frac{V^2}{r} = G\frac{mM}{r^2},\ V^2 = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r} = g\frac{R^2}{r}.$$

Линейная скорость связана с периодом обращения и радиусом орбиты $V = \dfrac{2\pi r}{T}$. Из двух последних соотношений находим

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 3{,}8\cdot 10^8\,\text{м}.$$

Пример № 7. Автомобиль движется в горизонтальной плоскости с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса $R = 200\,\text{м}$. Коэффициент трения скольжения шин по дороге $\mu = 0{,}1$. При какой скорости V автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль, показаны на рис. 9. Такими силами являются: сила трения $\vec{F}_{TP}$, сила сопротивления $\vec{F}_C$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_C + \vec{F}_{TP}$. Так как автомобиль движется по окружности равномерно $\vec{F}_{TP,\tau} = -\vec{F}_C$. Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

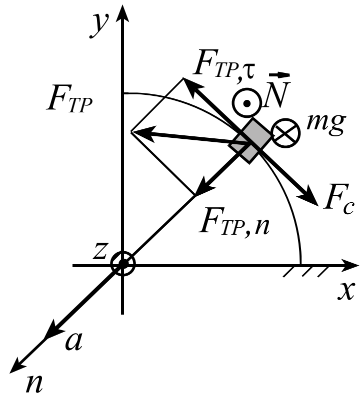


Рис. 9

$$m\frac{V^2}{R} = F_{TP,n} \qquad (17)$$

и на вертикаль

$$0 = N - mg. \qquad (18)$$

Величина силы трения ограничена $F_{TP} \le \mu N$. Тогда из (17), (18) следует, что при движении по окружности в горизонтальной плоскости $m\frac{V^2}{R} \le \mu m g$. Отсюда находим верхнюю оценку (при $F_c = 0$) скорости такого движения $V \le \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}1 \cdot 10 \cdot 200} \approx 14\,\text{м/с}$.

Пример № 8. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в $1/12$ окружности радиуса $R = 100\,\text{м}$. С какой наибольшей по величине V скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

Решение. На автомобиль в процессе разгона действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{TP}$, которая сонаправлена с ускорением $\vec{a}$. Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно обратиться к тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющим ускорения. По условию a_τ постоянна, следовательно величина скорости автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая a_τ связаны соотношением

$$V = \sqrt{2a_\tau s} = \sqrt{2a_\tau \frac{2\pi R}{12}}, \text{ отсюда } a_\tau = \frac{3V^2}{\pi R}.$$

Центростремительная составляющая ускорения определяется формулой $a_n = \frac{V^2}{R}$ и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{\max} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{3V^2}{\pi R}\right)^2} = \frac{V^2}{R}\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует $N = mg$, а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max} = \frac{F_{TP,\max}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g.$$

Тогда наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$V = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 15\text{м/с}.$$

Пример № 9. Массивный шарик, подвешенный на лёгкой нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 10). Расстояние от точки подвеса нити до плоскости, в которой происходит движение, равно H. Найдите период T обращения шарика. Ускорение свободного падения g.

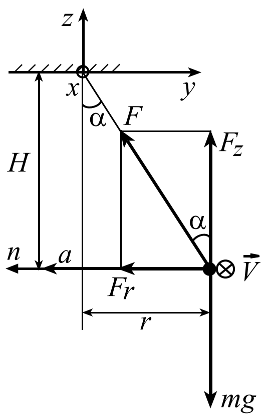


Рис. 10

Решение. Введём обозначения: $L-$ длина нити, $\alpha-$ угол, образуемый нитью с вертикалью, $r = L\sin\alpha-$ радиус окружности, по которой движется шарик со скоростью V. Заметим, что $H = L\cos\alpha$. Обратимся к динамике. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{F}$

нити. Эти силы сообщают шарику направленное к центру окружности нормальное ускорение, по величине равное $a = \frac{4\pi^2}{T^2} r$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление и на вертикаль, получаем

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} r = F \sin\alpha, \qquad (19)$$

$$0 = F\cos\alpha - mg. \qquad (20)$$

С учётом (20) преобразуем (19) к виду

$$m\frac{4\pi^2}{T^2} L\sin\alpha = mg \cdot tg\alpha, \text{ отсюда } T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Пример № 10. Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной L, массой M и жёсткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.

Решение. Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной Δl. Его масса $\Delta m = \frac{M}{2\pi R}\Delta l$. На выделенный участок действуют силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис. 11), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона $\Delta m \cdot \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Рассматриваемый элементарный участок под действием приложенных сил равномерно движется по окружности, следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Переходя в математической записи второго закона Ньютона к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, получаем

$$\frac{M\,\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2T\sin(\alpha/2).$$

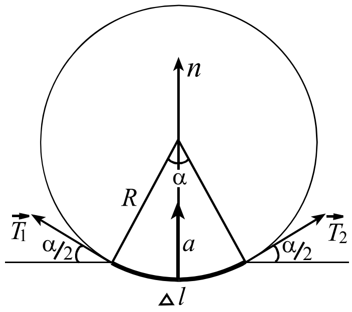


Рис. 11

Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $(2\pi R - L)$ кольца законом Гука $T = k(2\pi R - L)$. При малых углах

$\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta l/(2R)$. С учётом этих соотношений уравнение движения принимает вид $\dfrac{M\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2k(2\pi R - L)\dfrac{\Delta l}{2R}$.

Отсюда $R = \dfrac{2\pi k L}{4\pi^2 k - \omega^2 M}$. Из последней формулы следует, что при $\omega = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ кольцо должно неограниченно растягиваться, однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а с ростом ω кольцо разорвётся.

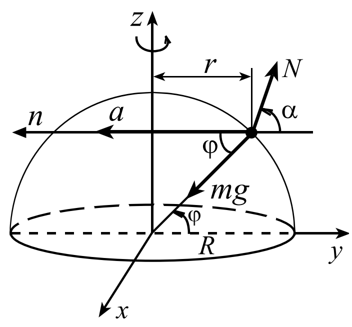


Рис. 12

Пример № 11. Определите вес P тела массой m на географической широте φ. Ускорение свободного падения g Землю считайте однородным шаром радиуса R.

Решение. Напомним, что вес $\vec{P}$ тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции $\vec{N}$ (рис.12). По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$. Поэтому для определения веса тела найдём силу реакции $\vec{N}$. В инерциальной системе отсчёта тело равномерно движется по окружности радиуса $r = R\cdot\cos\varphi$ с периодом одни сутки, т.е. $T = 86400\,c$ и циклической частотой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,3\cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно $a_n = \omega^2\cdot r = \omega^2\cdot R\cdot\cos\varphi$ и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции Земли тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол $\alpha \neq \varphi$, иначе сумма сил, приложенных к телу, а, следовательно, и ускорение были бы равны нулю. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\omega^2 R\cos\varphi = mg\cos\varphi - N\cos\alpha,$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит окружность, $0 = -mg\sin\varphi + N\sin\alpha$.

Исключая α из двух последних соотношений, находим вес тела

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2\omega^2 R(2g-\omega^2 R)\cos^2\varphi}.$$

Пример № 12. Маленький деревянный шарик прикреплён с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклонится от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

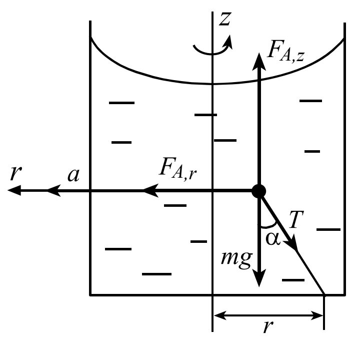


Рис. 13

Решение. Нить с шариком отклонится к оси вращения. Действительно, на шарик будут действовать три силы: сила $m\vec{g}$ тяжести, сила $\vec{T}$ натяжения нити и сила $\vec{F}_A$ Архимеда (рис. 13). Найдём эту силу. Обозначим объём шарика V, плотность дерева, из которого изготовлен шарик, $\rho_ш$, плотность воды ρ_B и рассмотрим движение жидкости до погружения в неё шарика. Любой элементарный объём воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) $F_{A,z}$ уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объёме, горизонтальная составляющая $F_{A,r}$ сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $F_{A,z} = \rho_B V g$, а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда по величине равна $F_{A,r} = \rho_B V\omega^2(r - l\sin\alpha)$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиуса $(r - l\sin\alpha)$ в горизонтальной плоскости. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$\rho_B V g - \rho_ш V g - T\cos\alpha = 0,$$

проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на нормальное направление, получаем

$$\rho_ш V\omega^2 (r - l\sin\alpha) = \rho_B V\omega^2 (r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,tg\alpha}{r - l\sin\alpha}} \approx 10{,}7\,\text{с}^{-1}.$$

Пример № 13. Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости $V = 90\,\text{км/ч}$ вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. При движении по горизонтальной дороге вес тела равен силе тяжести.

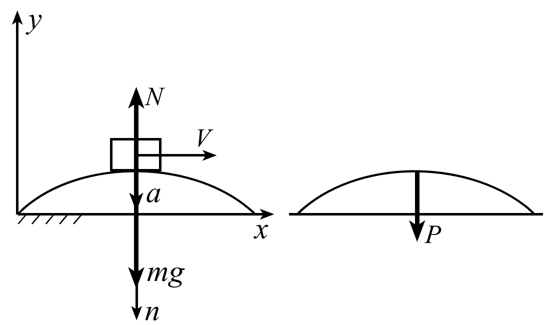


Рис. 14

Обратимся к движению автомобиля по мостику. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль и на мостик, показаны на рис. 14.

Для автомобиля в верхней точке мостика по второму закону Ньютона

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на нормальное направление $mV^2/R = mg - N$. По условию $P = mg/2$, а по третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, тогда $N = mg/2$. Из полученных соотношений находим

$$mV^2/R = mg/2 \quad \text{отсюда} \quad R = \frac{2\cdot V^2}{g} = \frac{2\cdot 25^2}{10} = 125\,\text{м}.$$

Рассмотрим два примера, в которых тела движутся по окружности неравномерно, при этом тангенциальное ускорение тоже изменяется. В этом случае наряду с законом Ньютона полезно привлекать закон изменения (или сохранения) механической энергии.

Пример № 14. По длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен μ ($\mu < H/2\pi R$). Найдите установившуюся скорость V скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.

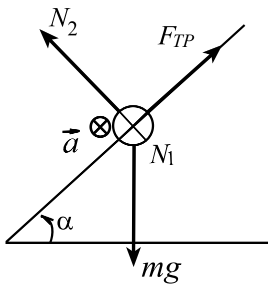


Рис. 15

Решение. На бусинку действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $F_{TP} = \mu N$, при этом $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, здесь $\vec{N}_1$ – горизонтальная составляющая, а $\vec{N}_2$ лежит в одной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{TP}$ (рис. 15). Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости составляющая N_1, сообщая бусинке центростремительное ускорение, а с ней и сила трения будут расти по величине, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью V. Для определения этой скорости перейдём в инерциальную систему отсчёта (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью $V\sin\alpha$, α – угол наклона вектора скорости к горизонту, $tg\alpha = H/2\pi R$. В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $V\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено по нормали к оси винтовой линии и по величине равно $(V\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, находим $m\dfrac{(V\cos\alpha)^2}{R} = N_1$. В вертикальной плоскости

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP},$$

переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, находим

$$F_{TP} = mg\sin\alpha, \quad N_2 = mg\cos\alpha.$$

Из этих соотношений с учётом $F_{TP} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ получаем

$$V = \left(gR/\mu\right)^{1/2}\left[\left(tg^2\alpha - \mu^2\right)\left(tg^2\alpha + 1\right)\right]^{1/4}.$$

Пример № 15. Гладкий желоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BD радиуса $R = 5$ м (рис. 16). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $V_0 = 10$ м/с. Определите модуль a ускорения шайбы в точке C и угол β, который вектор $\vec{a}$ ускорения шайбы в этот момент составляет с нормалью к траектории в точке C. Радиус OC образует с вертикалью угол $\alpha = 60^{\circ}$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

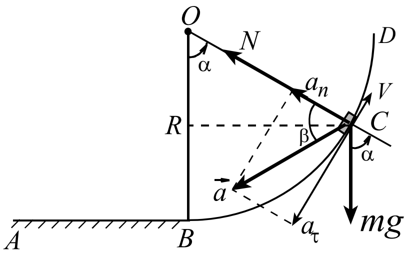


Рис. 16

Решение. Для нахождения ускорения $\vec{a}$ шайбы в точке C найдём тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения в этой точке. На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге BD (рис. 17), в любой точке действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил

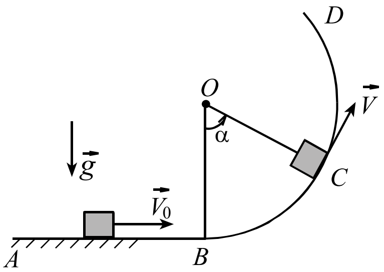


Рис. 17

и ускорения на тангенциальное направление $ma_\tau = -mg\sin\alpha$. Отсюда $a_\tau = -g\sin\alpha = -10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -8{,}7\text{м/с}^2$. Для определения $a_n = \dfrac{V^2}{R}$ найдём величину V скорости шайбы в точке C. Обратимся к энергетическим соображениям. При движении по горизонтальной части желоба скорость тела не изменяется вследствие отсутствия трения, а на вертикальной части желоба (как и на горизонтальной) сила нормальной реакции не совершает работу, т.к. эта сила перпендикулярна скорости. Следовательно, механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется. Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части желоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения механической энергии

$$m\frac{V_0^2}{2} = m\frac{V^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha),$$

отсюда

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} - 2g(1-\cos\alpha) = \frac{10^2}{5} - 2\cdot 10\cdot(1-\frac{1}{2}) = 10 \text{ м/с}^2.$$

Величину a ускорения шайбы в точке C найдём по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 13{,}2 \text{ м/с}^2.$$

В точке C вектор ускорения $\vec{a}$ образует с нормалью угол β такой, что $tg\beta = \dfrac{|a_\tau|}{a_n} \approx 0{,}87$, отсюда $\beta \approx 41^\circ$.

Пример № 16. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой $M = 100$ г. Из его верхней точки без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой $m = 25$ г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при $\alpha = 10^\circ$. Найдите коэффициент μ трения скольжения полушара по поверхности. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

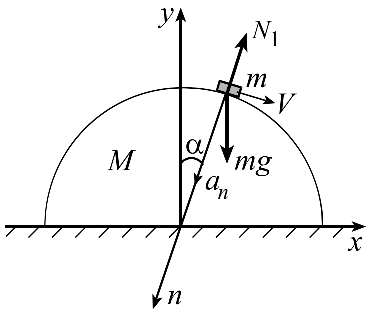


Рис. 18

Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ (рис. 18).

Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1$.
Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, в момент начала движения полушара получаем $m\dfrac{V^2}{R} = mg\cos\alpha - N_1$.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу в этот момент силы нормальной реакции

$$N_1 = mg(3\cos\alpha - 2).$$

На полушар действуют силы: тяжести $M\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}_2$, трения $\vec{F}_{TP}$ и вес $\vec{P}$ шайбы (рис. 19). По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}_1$. В момент начала движения полушара из второго закона Ньютона

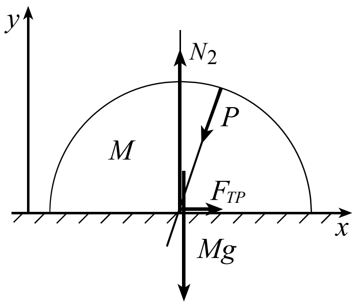


Рис. 19

$$M\vec{a_1} = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP},$$

переходя к проекциям сил и ускорения $\vec{a_1} = \vec{0}$ полушара на вертикальное направление, с учётом равенства $P = N_1$ получаем

$$N_2 = Mg + P\cos\alpha = Mg + mg(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha.$$

Переход к проекциям сил и ускорения полушара на горизонтальное направление позволяет определить величину силы трения

$$F_{TP} = P\sin\alpha = mg(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha.$$

С ростом α сила F_{TP} увеличивается, сила N_2 уменьшается. В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением $F_{TP} = \mu \cdot N_2$. Отсюда

$$\mu = \frac{F_{TP}}{N_2} = \frac{m(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha}{M + m(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha} \approx 0{,}033.$$

Контрольные вопросы

Справочные данные: гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, масса Земли $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = G\dfrac{M}{R^2} \approx 10\,\text{м}/\text{с}^2$; объём шара радиуса R равен $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

1. Вычислите и сравните угловую скорость вращения часовой стрелки часов и угловую скорость Земли в её суточном вращении.

2. Вычислите в *гелиоцентрической* системе отсчёта ускорение Земли, обусловленное обращением планеты вокруг Солнца. Вычислите в *геоцентрической* системе отсчёта ускорение Солнца, обусловленное его видимым с Земли движением по небесной сфере. Радиус земной орбиты считайте равным $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

3. Колесо, частота обращения которого в некоторый момент времени $n = 4\,\text{с}^{-1}$ (оборота в секунду), останавливается через $\tau = 30$ с. Определите величину углового ускорения ε колеса, считая его постоянным. Какое число N оборотов совершит колесо за указанное время?

4*. В окрестности какой точки траектории камня, брошенного со скоростью $V_0 = 10\,\text{м}/\text{с}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, радиус кривизны траектории наименьший? Вычислите этот радиус.

5. Считая Луну однородным шаром плотностью $\rho = 3,34 \cdot 10^3$ кг/м^3, найдите период обращения её приповерхностного спутника.

6. Поезд движется в горизонтальной плоскости по дуге окружности радиуса $R = 800$ м со скоростью $V = 20$ м/с. На какую величину Δh внешний рельс должен быть выше внутреннего, чтобы боковое давление на рельсы было равно нулю? Расстояние между рельсами $d = 1,5$ м.

7. Вес некоторого тела на полюсе Земли на $\Delta P = 0,34$ Н больше веса на экваторе. Найдите массу этого тела. Землю считайте однородным шаром.

8. Предположим, что вес тела (см. предыдущий вопрос) измеряют в летящем вдоль экватора самолёте. В каком направлении и с какой скоростью V относительно поверхности Земли летит самолёт, если вес равен силе тяжести?

Задачи

1. Птица массой $m = 0{,}1$ кг летит горизонтально по криволинейной траектории. Скорость птицы за $\Delta t = 0{,}1$ с увеличилась по модулю от $V_1 = 1{,}50$ м/с до $V_2 = 1{,}55$ м/с и повернулась на угол $\Delta\alpha = 0{,}02$ рад. Найдите ускорение $\vec{a}$ птицы и местный радиус R кривизны траектории.

2. Бусинка надета на шероховатую горизонтальную спицу на расстоянии r от левого конца. Коэффициент трения скольжения бусинки по спице равен μ. Спицу приводят во вращение относительно вертикальной оси, перпендикулярной спице и проходящий через её левый конец. В процессе вращения угловое ускорение спицы постоянно. Пренебрегая действием силы тяжести, найдите длину S пути, пройденного бусинкой до начала проскальзывания относительно спицы.

3. На внутренней поверхности сферы радиуса $R = 2{,}75$ м находится маленькая шайба. До какой максимальной угловой скорости ω можно раскрутить сферу вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр, чтобы шайба не проскальзывала, находясь на $h = 1{,}65$ м ниже центра сферы? Коэффициент трения скольжения шайбы по сфере $\mu = 0{,}5$.

4. Небольшое тело массой $m = 0{,}1$ кг, подвешенное на лёгком резиновом шнуре, движется по окружности в горизонтальной плоскости, совершая полный оборот за время $T = 1{,}25$ с. Шнур составляет с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Коэффициент упругости шнура $k = 10$ Н/м. Определите длину l_0 нерастянутого шнура.

5*. Однородная кольцевая цепочка массы $m = 157$ г и длины $l = 1$ м надета на гладкий конус, ось которого вертикальна. Угол полураствора конуса $\alpha = 45^\circ$. Конус приводят во вращение относительно оси, и каждый элемент цепочки движется со скоростью $V = 2$ м/с. Найдите величину F силы натяжения цепочки.

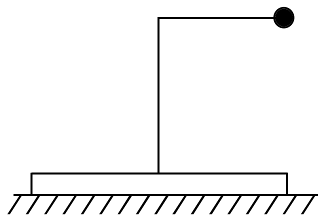
6. Космонавты, высадившиеся на поверхность Марса, измерили период обращения конического маятника (небольшое тело, прикреплённое к нити и движущееся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной по величине скоростью), оказавшийся равным $T = 3$ с. Длина нити $l = 1$ м. Нить составляла с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Найдите по этим данным ускорение свободного падения на Марсе. Наблюдая Землю космонавты видят, что Солнцем освещена ровно половина видимого диска. На каком расстоянии S от Земли находится Марс в этот момент? Считайте, что Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по круговым орбитам радиусов $R_E = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м и $R_M = 2{,}25 \cdot 10^{11}$ м соответственно.

7. На экваторе некоторой вращающейся планеты тела весят втрое меньше, чем на полюсе. На какой угол δ отклонится от оси вращения планеты нить, на которой подвешен груз, если измерение веса груза будет проводиться на широте $\varphi = 30^\circ$?

8*. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и движется по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Радиус орбиты в три раза больше радиуса Земли. Через какое время τ спутник первый раз пройдёт над точкой запуска?

9*. Закрытая пробирка длины L, полностью заполненная жидкостью, составляет угол α с вертикальной осью, проходящей через её нижний конец. В жидкости плавает маленький лёгкий шарик. До какой угловой скорости ω следует раскрутить пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы шарик погрузился до середины пробирки?

10*. По гладкой проволочной винтовой линии радиуса R с шагом h, ось которой вертикальна, скользит с нулевой начальной скоростью бусинка массой m. С какой по величине силой F бусинка будет действовать на проволоку в момент, когда она опустится по вертикали на H ?



11*. Брусок, к вертикальной стойке которого на лёгкой нити прикреплён шарик массы m, покоится на шероховатой горизонтальной поверхности. Нить с шариком отклонили до горизонтального положения и отпустили. После этого шарик движется в вертикальной плоскости по окружности с нулевой начальной скоростью. Найдите массу M бруска, если он сдвинулся, когда угол между нитью и вертикалью был равен α_0. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности равен μ ($tg\alpha_0 > \mu$).