§2. Динамика движения по окружности

В инерциальной системе отсчёта основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots . \qquad (14)$$

Рассмотрим подробнее *равномерное движение тела по окружности*, лежащей в плоскости *XOY* координатной системы. Из (7) и (14) следует, что при таком движении сумма сил, так же как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в (14) к скалярной форме записи, удобно перейти не к проекциям сил и ускорения на оси OX, OY инерциальной системы отсчета, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению

$$m a_n = m\frac{V^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \dots . \qquad (15)$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости XOY. Тогда $a_z = 0$ и из (14) находим, что сумма проекций сил на направление *OZ*, перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots . \qquad (16)$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1. в инерциальной системе отсчёта привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,
2. составить уравнения (14) – (16) и решить полученную систему.

Отметим, что из (15) следует – *произведение массы тела на нормальное* (*радиальное, центростремительное*) *ускорение равно сумме нормальных проекций всех действующих на тело сил.* Эту сумму, стоящую в правой части (15), часто неудачно называют центростремительной силой. Из (14) видно, что никакой центростремительной силы в природе не существует. В инерциальной системе отсчёта движение по окружности всегда происходит под действием сил, обусловленных известными взаимодействиями. Такими силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры и т.д.

Пример № 6. Период обращения Луны вокруг Земли в геоцентрической системе отсчёта равен $T = 27{,}32$ суток. Зная радиус Земли $R = 6400$ км и ускорение свободного падения у её поверхности $g = 10$ м/с^2, найдите расстояние r до Луны.

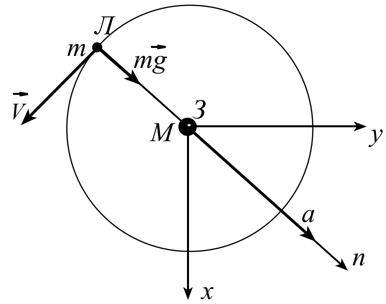

Рис. 8

Решение. Будем считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса r под действием силы притяжения к Земле. Тогда из второго закона Ньютона (рис. 8) $m\vec{a} = m\vec{g}(r)$, переходя к проекциям силы притяжения и ускорения на нормальное направление, получаем

$$m\frac{V^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}, \ V^2 = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r} = g\frac{R^2}{r}.$$

Линейная скорость связана с периодом обращения и радиусом орбиты $V = \dfrac{2\pi r}{T}$. Из двух последних соотношений находим

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 3{,}8 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Пример № 7. Автомобиль движется в горизонтальной плоскости с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса $R = 200$ м. Коэффициент трения скольжения шин по дороге $\mu = 0{,}1$. При какой скорости V автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль, показаны на рис. 9. Такими силами являются: сила трения $\vec{F}_{TP}$, сила сопротивления $\vec{F}_C$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_C + \vec{F}_{TP}$. Так как автомобиль движется по окружности равномерно $\vec{F}_{TP,\tau} = -\vec{F}_C$. Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

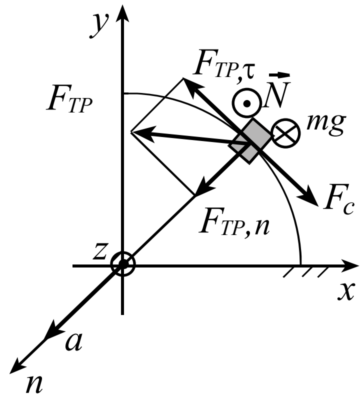

Рис. 9

$$m\frac{V^2}{R} = F_{TP,n} \tag{17}$$

и на вертикаль

$$0 = N - mg. \tag{18}$$

Величина силы трения ограничена $F_{TP} \le \mu N$. Тогда из (17), (18) следует, что при движении по окружности в горизонтальной плоскости $m\frac{V^2}{R} \le \mu m g$. Отсюда находим верхнюю оценку (при $F_c = 0$) скорости такого движения $V \le \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}1 \cdot 10 \cdot 200} \approx 14\,\text{м/с}$.

Пример № 8. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в $1/12$ окружности радиуса $R = 100\,\text{м}$. С какой наибольшей по величине V скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

Решение. На автомобиль в процессе разгона действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{TP}$, которая сонаправлена с ускорением $\vec{a}$. Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно обратиться к тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющим ускорения. По условию a_τ постоянна, следовательно величина скорости автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая a_τ связаны соотношением

$$V=\sqrt{2a_\tau s}=\sqrt{2a_\tau\frac{2\pi R}{12}},\ \text{отсюда}\ a_\tau=\frac{3V^2}{\pi R}.$$

Центростремительная составляющая ускорения определяется формулой $a_n=\dfrac{V^2}{R}$ и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{\max}=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2+\left(\frac{3V^2}{\pi R}\right)^2}=\frac{V^2}{R}\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует $N=mg$, а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max}=\frac{F_{TP,\max}}{m}=\frac{\mu N}{m}=\mu g.$$

Тогда наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$V=\sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}}\approx 15\text{м/с}.$$

Пример № 9. Массивный шарик, подвешенный на лёгкой нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 10). Расстояние от точки подвеса нити до плоскости, в которой происходит движение, равно H. Найдите период T обращения шарика. Ускорение свободного падения g.

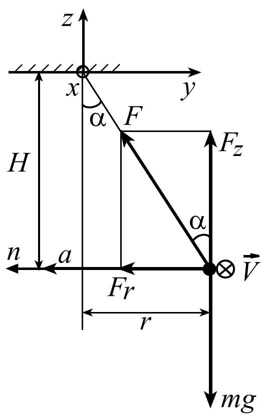

Рис. 10

Решение. Введём обозначения: $L-$ длина нити, $\alpha-$ угол, образуемый нитью с вертикалью, $r=L\sin\alpha-$ радиус окружности, по которой движется шарик со скоростью V. Заметим, что $H=L\cos\alpha$. Обратимся к динамике. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{F}$

нити. Эти силы сообщают шарику направленное к центру окружности нормальное ускорение, по величине равное $a = \frac{4\pi^2}{T^2} r$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление и на вертикаль, получаем

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} r = F \sin\alpha, \qquad (19)$$

$$0 = F \cos\alpha - mg. \qquad (20)$$

С учётом (20) преобразуем (19) к виду

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} L \sin\alpha = mg \cdot tg\alpha, \text{ отсюда } T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Пример № 10. Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной L, массой M и жёсткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.

Решение. Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной Δl. Его масса $\Delta m = \frac{M}{2\pi R} \Delta l$. На выделенный участок действуют силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис. 11), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона $\Delta m \cdot \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Рассматриваемый элементарный участок под действием приложенных сил равномерно движется по окружности, следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Переходя в математической записи второго закона Ньютона к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, получаем

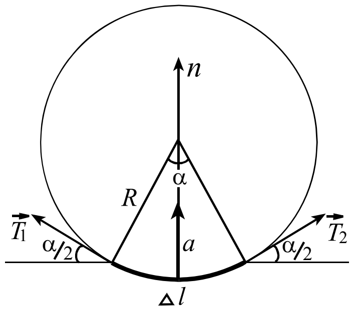

Рис. 11

$$\frac{M\,\Delta l}{2\pi R} \omega^2 R = 2T \sin(\alpha / 2).$$

Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $(2\pi R - L)$ кольца законом Гука $T = k(2\pi R - L)$. При малых углах

$\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta l/(2R)$. С учётом этих соотношений уравнение движения принимает вид $\dfrac{M\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2k(2\pi R - L)\dfrac{\Delta l}{2R}$.

Отсюда $R = \dfrac{2\pi k L}{4\pi^2 k - \omega^2 M}$. Из последней формулы следует, что при $\omega = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ кольцо должно неограниченно растягиваться, однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а с ростом ω кольцо разорвётся.

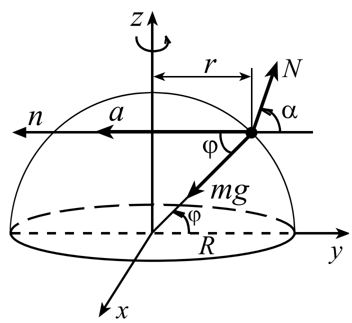

Рис. 12

Пример № 11. Определите вес P тела массой m на географической широте φ. Ускорение свободного падения g Землю считайте однородным шаром радиуса R.

Решение. Напомним, что вес $\vec{P}$ тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции $\vec{N}$ (рис.12). По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$. Поэтому для определения веса тела найдём силу реакции $\vec{N}$. В инерциальной системе отсчёта тело равномерно движется по окружности радиуса $r = R \cdot \cos\varphi$ с периодом одни сутки, т.е. $T = 86400\,c$ и циклической частотой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,3 \cdot 10^{-5}\ \text{c}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно $a_n = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos\varphi$ и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции Земли тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол $\alpha \neq \varphi$, иначе сумма сил, приложенных к телу, а, следовательно, и ускорение были бы равны нулю. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\omega^2 R\cos\varphi = mg\cos\varphi - N\cos\alpha,$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит окружность, $0 = -mg\sin\varphi + N\sin\alpha$.

Исключая α из двух последних соотношений, находим вес тела

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2\omega^2 R(2g - \omega^2 R)\cos^2\varphi}.$$

Пример № 12. Маленький деревянный шарик прикреплён с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклонится от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

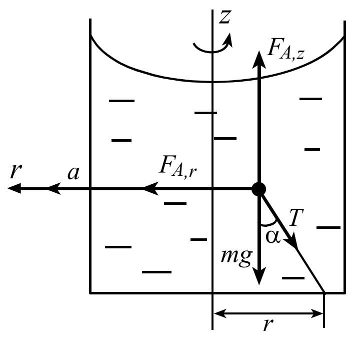

Рис. 13

Решение. Нить с шариком отклонится к оси вращения. Действительно, на шарик будут действовать три силы: сила $m\vec{g}$ тяжести, сила $\vec{T}$ натяжения нити и сила $\vec{F}_A$ Архимеда (рис. 13). Найдём эту силу. Обозначим объём шарика V, плотность дерева, из которого изготовлен шарик, $\rho_ш$, плотность воды ρ_B и рассмотрим движение жидкости до погружения в неё шарика. Любой элементарный объём воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) $F_{A,z}$ уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объёме, горизонтальная составляющая $F_{A,r}$ сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $F_{A,z} = \rho_B V g$, а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда по величине равна $F_{A,r} = \rho_B V\omega^2(r - l\sin\alpha)$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиуса $(r - l\sin\alpha)$ в горизонтальной плоскости. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$\rho_B V g - \rho_ш V g - T\cos\alpha = 0,$$

проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на нормальное направление, получаем

$$\rho_ш V \omega^2 (r - l\sin\alpha) = \rho_B V \omega^2 (r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{g\, tg\alpha}{r - l\sin\alpha}} \approx 10{,}7\,\text{с}^{-1}.$$

Пример № 13. Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости $V = 90\,$км/ч вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. При движении по горизонтальной дороге вес тела равен силе тяжести.

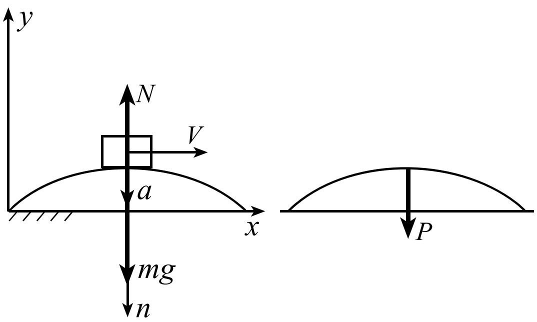

Рис. 14

Обратимся к движению автомобиля по мостику. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль и на мостик, показаны на рис. 14.

Для автомобиля в верхней точке мостика по второму закону Ньютона

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на нормальное направление $mV^2/R = mg - N$. По условию $P = mg/2$, а по третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, тогда $N = mg/2$. Из полученных соотношений находим

$$mV^2/R = mg/2 \quad \text{отсюда} \quad R = \frac{2 \cdot V^2}{g} = \frac{2 \cdot 25^2}{10} = 125\,\text{м}.$$

Рассмотрим два примера, в которых тела движутся по окружности неравномерно, при этом тангенциальное ускорение тоже изменяется. В этом случае наряду с законом Ньютона полезно привлекать закон изменения (или сохранения) механической энергии.

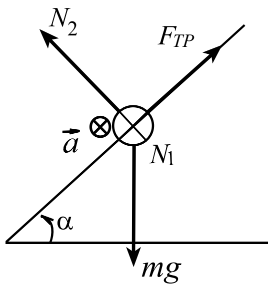

Рис. 15

Пример № 14. По длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен μ ($\mu < H/2\pi R$). Найдите установившуюся скорость V скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.

Решение. На бусинку действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $F_{TP} = \mu N$, при этом $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, здесь $\vec{N}_1$ – горизонтальная составляющая, а $\vec{N}_2$ лежит в одной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{TP}$ (рис. 15). Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости составляющая N_1, сообщая бусинке центростремительное ускорение, а с ней и сила трения будут расти по величине, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью V. Для определения этой скорости перейдём в инерциальную систему отсчёта (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью $V\sin\alpha$, $\alpha -$ угол наклона вектора скорости к горизонту, $tg\alpha = H/2\pi R$. В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $V\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено по нормали к оси винтовой линии и по величине равно $(V\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, находим $m\dfrac{(V\cos\alpha)^2}{R} = N_1$. В вертикальной плоскости

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP},$$

переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, находим

$$F_{TP} = mg\sin\alpha, \quad N_2 = mg\cos\alpha.$$

Из этих соотношений с учётом $F_{TP} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ получаем

$$V = \left(gR/\mu\right)^{1/2}\left[\left(tg^2\alpha - \mu^2\right)\left(tg^2\alpha + 1\right)\right]^{1/4}.$$

Пример № 15. Гладкий желоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BD радиуса $R = 5$ м (рис. 16). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $V_0 = 10$ м/с. Определите модуль a ускорения шайбы в точке C и угол β, который вектор $\vec{a}$ ускорения шайбы в этот момент составляет с нормалью к траектории в точке C. Радиус OC образует с вертикалью угол $\alpha = 60^{\circ}$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

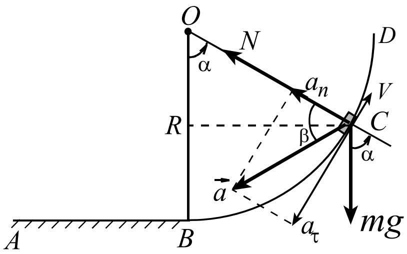

Рис. 16

Решение. Для нахождения ускорения $\vec{a}$ шайбы в точке C найдём тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения в этой точке. На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге BD (рис. 17), в любой точке действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил

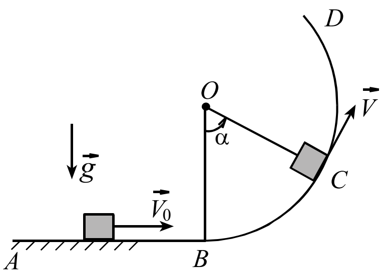

Рис. 17

и ускорения на тангенциальное направление $ma_\tau = -mg\sin\alpha$. Отсюда $a_\tau = -g\sin\alpha = -10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -8{,}7\text{м/с}^2$. Для определения $a_n = \frac{V^2}{R}$ найдём величину V скорости шайбы в точке C. Обратимся к энергетическим соображениям. При движении по горизонтальной части желоба скорость тела не изменяется вследствие отсутствия трения, а на вертикальной части желоба (как и на горизонтальной) сила нормальной реакции не совершает работу, т.к. эта сила перпендикулярна скорости. Следовательно, механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется. Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части желоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения механической энергии

$$m\frac{V_0^2}{2} = m\frac{V^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha),$$

отсюда

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} - 2g(1-\cos\alpha) = \frac{10^2}{5} - 2\cdot 10\cdot(1-\frac{1}{2}) = 10\ \text{м/с}^2.$$

Величину a ускорения шайбы в точке C найдём по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 13{,}2\ \text{м/с}^2.$$

В точке C вектор ускорения $\vec{a}$ образует с нормалью угол β такой, что $tg\beta = \frac{|a_\tau|}{a_n} \approx 0{,}87$, отсюда $\beta \approx 41^\circ$.

Пример № 16. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой $M = 100$ г. Из его верхней точки без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой $m = 25$ г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при $\alpha = 10^\circ$. Найдите коэффициент μ трения скольжения полушара по поверхности. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

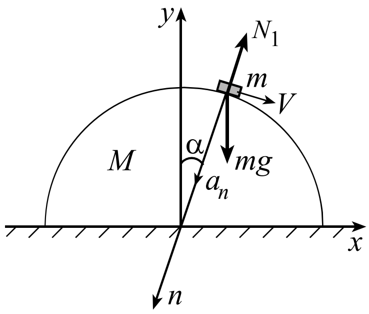

Рис. 18

Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ (рис. 18).

Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1$.
Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, в момент начала движения полушара получаем $m\dfrac{V^2}{R} = mg\cos\alpha - N_1$.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу в этот момент силы нормальной реакции

$$N_1 = mg(3\cos\alpha - 2).$$

На полушар действуют силы: тяжести $M\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}_2$, трения $\vec{F}_{TP}$ и вес $\vec{P}$ шайбы (рис. 19). По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}_1$. В момент начала движения полушара из второго закона Ньютона

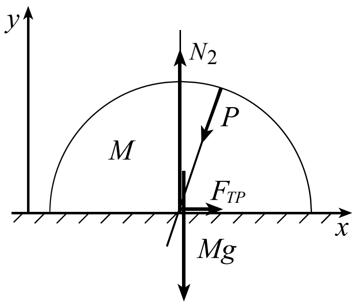

Рис. 19

$$M\vec{a_1} = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP},$$

переходя к проекциям сил и ускорения $\vec{a_1} = \vec{0}$ полушара на вертикальное направление, с учётом равенства $P = N_1$ получаем

$$N_2 = Mg + P\cos\alpha = Mg + mg(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha.$$

Переход к проекциям сил и ускорения полушара на горизонтальное направление позволяет определить величину силы трения

$$F_{TP} = P\sin\alpha = mg(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha.$$

С ростом α сила F_{TP} увеличивается, сила N_2 уменьшается. В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением $F_{TP} = \mu \cdot N_2$. Отсюда

$$\mu = \frac{F_{TP}}{N_2} = \frac{m(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha}{M + m(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha} \approx 0{,}033.$$