§1. Кинематика движения точки по окружности

1.1. Линейная и угловая скорости

Важным частным случаем движения материальной точки по заданной траектории является движение по окружности. Рассмотрим движение материальной точки M по окружности радиуса R с центром в точке O.

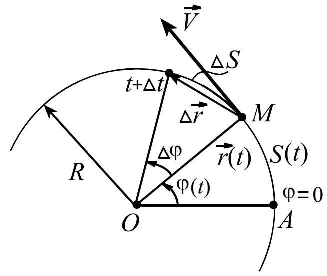

Рис. 1

В произвольный момент времени t положение точки на окружности однозначно определяется углом $\varphi(t)$, который радиус-вектор $\vec{r}(t)$ точки M образует с направлением начала отсчёта углов (рис.1). Таким направлением будем считать направление OA. Другим способом задания положения точки на окружности является задание длины $S(t)$ дуги AM. Оба способа задания положения точки на окружности эквивалентны, так как угловая $\varphi(t)$ и дуговая $S(t)$ координаты связаны определением радианной меры угла $\varphi(t) = \dfrac{S(t)}{R}$.

Рассмотрим перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{V}\Delta t$ точки M при движении по окружности за малый промежуток времени Δt. Это перемещение стягивается дугой длиной $\Delta S \approx |\Delta\vec{r}| = |\vec{V}|\Delta t$, а радиус-вектор точки M поворачивается при этом на угол $\Delta\varphi$. На такой же угол поворачивается и вектор скорости, *так как скорость* $\vec{V}$ *перпендикулярна* $\vec{r}$ – радиусу – вектору точки, т.к. направлена по касательной к окружности.

Линейной скоростью $V(t)$ точки называют отношение длины ΔS дуги ко времени Δt перемещения (при $\Delta t \to 0$)

$$V(t) = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1}$$

Линейная скорость точки есть модуль (величина) вектора скорости. В системе СИ линейную скорость измеряют в м/с (метр в секунду).

Угловой скоростью $\omega(t)$ радиуса-вектора точки называют отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот был совершен (при $\Delta t \to 0$),

$$\omega\,(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (2)$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости точки, так как линейная скорость $\vec{V} \perp \vec{r}$ – радиусу-вектору точки. В системе СИ угловую скорость измеряют в рад/с (радиан в секунду).

Следует отметить, что в учебных пособиях угловую скорость радиуса-вектора точки часто называют просто угловой скоростью, а в качестве единицы измерения угловой скорости указывают $1/c$ (обратную секунду, $с^{-1}$): последнее обусловлено тем, что радиан – величина безразмерная.

Замечая, что $\Delta\varphi(t) = \dfrac{\Delta S(t)}{R}$, приходим с учётом (1) и (2) к соотношению, связывающему линейную $V(t)$ и угловую $\omega(t)$ скорости при произвольном движении материальной точки по окружности радиуса R

$$V(t) = \omega\,(t) \cdot R. \qquad (3)$$

1.2. Равномерное движение по окружности. Период и частота обращения

Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью называют равномерным движением по окружности. Из (3) следует, что при таком движении угловая скорость ω тоже постоянна. В этом случае её называют также циклической частотой.

Для описания равномерного движения по окружности наряду с циклической частотой ω удобно использовать *период обращения* T, определяемый как время, в течение которого совершается один полный оборот, и *частоту* ν *обращения* $\nu = \dfrac{1}{T}$, которая численно равна числу оборотов радиуса-вектора точки за единицу времени. В связи с этим говорят, что частота ν измеряется в оборотах в секунду.

Из определения (2) угловой скорости следует, что при равномерном движении по окружности величины ω, T и ν связаны соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\,\pi\,\nu. \qquad (4)$$

Размерности ω и ν одинаковы (1/с), так как эти величины различаются лишь числовым множителем 2π.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих применение введённых величин.

Пример 1. Считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R = 150$ млн.км, найдите линейную скорость V Земли в её годичном движении вокруг Солнца.
Решение. Будем считать, что Земля совершает один полный оборот вокруг Солнца за 365 суток. Тогда период обращения Земли $T = 3{,}15 \cdot 10^7$ с. Далее из (3) и (4) находим

$$V = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2 \cdot 3{,}14}{3{,}15 \cdot 10^7} \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 30 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Пример 2. Рельсы игрушечной железной дороги образуют кольцо радиуса R. Вагончик M перемещается по рельсам, подталкиваемый стержнем AB, который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг точки A, лежащей внутри кольца почти у самых рельсов (рис. 2). Как зависит от времени линейная скорость $V(t)$ вагончика? Считайте $0 \le \varphi_1 < \pi/2$.

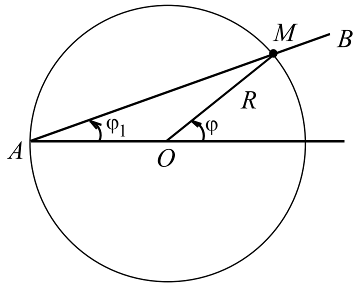

Рис. 2

Решение. Будем считать, что угол φ_1 отсчитывается от направления, задаваемого радиусом AO (точка O – центр окружности, по которой движется вагончик). Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_1, следовательно угол φ_1 растёт со временем по линейному закону $\varphi_1 = \omega_1 t$. Найдём зависимость от времени t угла φ поворота радиуса-вектора вагончика. Для этого заметим, что треугольник AOM равнобедренный, тогда $\angle AMO = \varphi_1$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним несмежных, отсюда $\varphi = 2\varphi_1 = 2\omega_1 t$. Заметим, что угол $\varphi(t)$ растёт со временем по линейному закону, и что угловая скорость ω вагончика при движении по рельсам постоянна и вдвое больше угловой скорости ω_1, с которой вращается стержень, т.е. $\omega = 2\omega_1$. Следовательно, вагончик движется по окружности равномерно, его линейная скорость от времени не зависит и равна

$$V = \omega \cdot R = 2 \cdot \omega_1 \cdot R.$$

1.3. Ускорение при равномерном движении по окружности

По определению ускорение $\vec{a}$ материальной точки есть векторная величина, равная отношению приращения вектора скорости ко времени, за которое произошло это приращение,

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t \to 0\text{)}. \quad (5)$$

Найдём величину и направление ускорения $\vec{a}$ точки при равномерном движении по окружности. Допустим, что при этом движении радиус-вектор точки за время от t до $t + \Delta t$ совершил поворот на угол $\Delta\varphi$ (рис. 3). Из равнобедренного треугольника, иллюстрирующего соотношение $\Delta\vec{V} = \vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)$, найдём величину приращения вектора скорости, обусловленного только изменением направления (вращением) вектора скорости

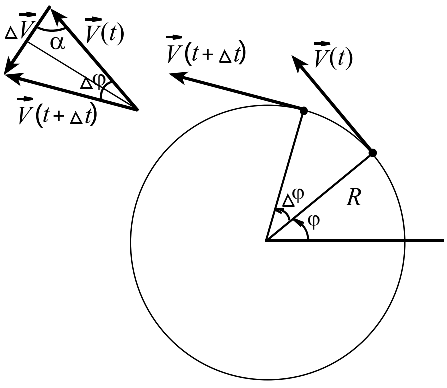

Рис. 3

$$\left|\Delta\vec{V}\right| = 2 \cdot V \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx V \cdot \Delta\varphi,$$

здесь учтено, что при малых аргументах, т.е. при $|x| << 1$ выполняется приближённое равенство $\sin x \approx x$, где x выражен в радианной мере. Тогда из соотношения (5) находим величину a вектора ускорения точки при равномерном движении по окружности $a = \left|\vec{a}(t)\right| = \frac{\left|\Delta\vec{V}\right|}{\Delta t} = \frac{V \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = V \cdot \omega.$

С учётом (3) и (4) последнее соотношение можно также представить в виде

$$a = \omega \cdot V = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot R. \quad (6)$$

Установим направление вектора $\vec{a}$. Из (5) следует, что ускорение $\vec{a}$ и приращение $\Delta\vec{V}$ скорости – сонаправленные векторы. При $\Delta t \to 0$

угол $\Delta\varphi \to 0$ и $\alpha = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \to \dfrac{\pi}{2}$ следовательно в любой момент времени векторы $\vec{V}$ и $\vec{a}$ взаимно перпендикулярны, при этом вектор ускорения направлен по радиусу к центру окружности и с радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ точки связан соотношением (рис. 4)

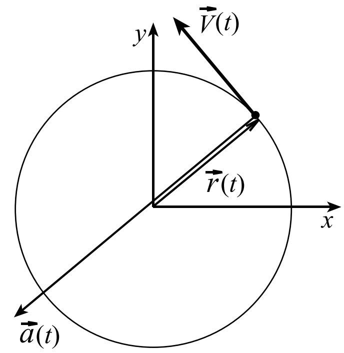

Рис. 4

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t). \qquad (7)$$

Так как вектор ускорения направлен к центру окружности, то такое ускорение называют центростремительным (радиальным, нормальным, т.е. направленным по внутренней нормали к траектории). Подчеркнём, что величина центростремительного ускорения (как видно из вывода) связана с угловой скоростью вращения вектора скорости.

Сформулируем вывод, *движение точки по окружности с постоянной по величине скоростью есть движение ускоренное, при этом вектор ускорения в любой момент времени направлен к центру окружности, а его величина постоянна и определяется из* (6).

Пример № 3. Найдите скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точек земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$, обусловленные участием в суточном вращении Земли. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Выберем указанную на рис. 5 систему отсчёта. Начало отсчёта поместим в центр Земли, плоскость XY совпадает с плоскостью экватора, ось Z совпадает с осью вращения планеты. В выбранной системе отсчёта любая точка земной поверхности на широте φ движется равномерно по окружности радиуса $r = R\cos\varphi$ (на рисунке 5 показана пунктиром) с периодом в одни сутки, т.е. $T = 86400$ с. Скорость любой точки направлена по касательной к такой окружности, а ускорение к её центру. Величины векторов скорости и ускорения найдём из (3) и (6)

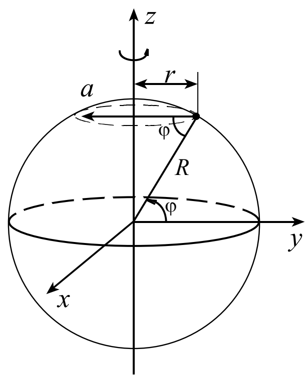

Рис. 5

$$V=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi R\cos\varphi}{T}\approx 230\,\text{м/с},\quad a=\omega^2 r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi\approx 0{,}017\,\text{м/с}^2.$$

1.4. Ускорение при неравномерном движении по окружности

При неравномерном движении по окружности изменяется со временем не только направление вектора $\vec{V}$ скорости, но и его модуль V. В этом случае приращение $\Delta\vec{V}$ вектора скорости (рис. 6) может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих $\Delta\vec{V}=\Delta\vec{V}_\tau+\Delta\vec{V}_n$, где $\Delta\vec{V}_\tau$ – составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости $\vec{V}$, и обусловленная приращением величины вектора скорости на $\Delta V_\tau=\Delta V=\left|\Delta\vec{V}\right|\cos\theta$; вторая составляющая $\Delta\vec{V}_n$ – нормальная (нами уже изучена), обусловлена (как и прежде) поворотом вектора скорости. Тогда естественно и ускорение представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих

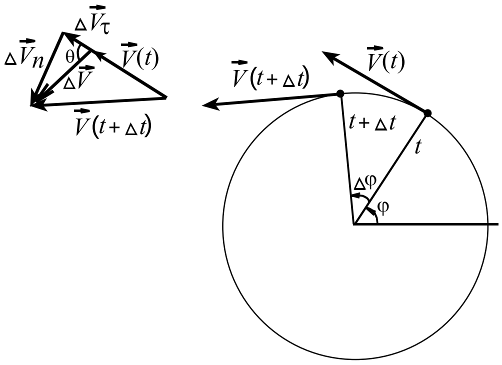

Рис. 6

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{V}_\tau}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{V}_n}{\Delta t}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n. \tag{8}$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения

$$a_\tau=\frac{\Delta V}{\Delta t},\ (\Delta t\to 0),\ \ a_n=\omega\cdot V=\frac{V^2}{R}. \tag{9}$$

Отметим, что касательная составляющая a_τ ускорения определяется скоростью изменения модуля вектора скорости, в свою очередь нормальная (радиальная) составляющая a_n связана с угловой скоростью вращения вектора скорости. По теореме Пифагора

$$a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}. \tag{10}$$

Отметим, что движение по произвольной криволинейной траектории может быть представлено как последовательность перемещений *по элементарным дужкам окружностей. Тогда соотношения* (9), (10) *справедливы и при неравномерном движении материальной точки по произвольной криволинейной траектории, при этом величину* R *в формуле* (9) *для* a_n *называют радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке. Иначе говоря, это радиус элементарной дужки окружности, с которой в первом приближении совпадает траектория материальной точки в малой окрестности того места, где эта точка в данный момент находится.*

В заключение отметим, что при неравномерном движении по окружности угловая скорость ω зависит от времени. Скорость изменения ω со временем называют угловым ускорением ε, которое вводится по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t \to 0 \text{)}. \quad (11)$$

Если угловое ускорение постоянно, то зависимость угла поворота радиуса-вектора от времени (по аналогии с кинематикой равнопеременного движения по прямой) принимает вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Из (9) и (11) следует, что тангенциальная составляющая a_τ ускорения материальной точки и угловое ускорение ε связаны соотношением

$$a_\tau = \frac{\Delta V}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Пример № 4. Материальная точка движется по окружности радиуса R с постоянным угловым ускорением ε. Найдите зависимости от времени величин скорости V и ускорения a. В начальный момент времени точка покоилась.

Решение. Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость будет увеличиваться со временем по линейному закону

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \varepsilon \cdot t. \quad (13)$$

Из (3) с учётом (13) находим $V(t) = R \cdot \omega(t) = R \cdot \varepsilon \cdot t$.

Далее из соотношений (9), (12) и (13) находим проекции вектора ускорения на направления: тангенциальное $a_\tau = R \cdot \varepsilon$, нормальное $a_n = \omega^2 R = (\varepsilon \cdot t)^2 R$, и величину (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \varepsilon \cdot R \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Пример № 5. Камень брошен со скоростью V_0 под углом α к горизонту. В малой окрестности точки старта найдите радиус R кривизны траектории и угловую скорость ω вращения вектора скорости.

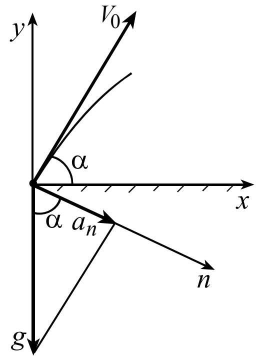

Рис. 7

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношениями

$$R = \frac{V^2}{a_n}, \qquad \omega = \frac{a_n}{V}. \qquad \text{(см. (9)).}$$

В малой окрестности точки старта (рис. 7) $V = V_0$, нормальное ускорение a_n есть проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на нормаль к траектории $a_n = g \cdot \cos\alpha$. Из приведённых соотношений находим $R = \dfrac{V_0^2}{g\cos\alpha}, \qquad \omega = \dfrac{g\cos\alpha}{V_0}.$