

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Заочная физико-техническая школа**

**МАТЕМАТИКА**

**Комплексные числа**

Задание для 10-х классов

(2016 – 2017 учебный год)

(факультативное задание)



г. Долгопрудный, 2017

*Составитель:* С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание для 10-х классов (2016 – 2017 учебный год), 2017, 31 с.

**Внимание!** Данное задание является факультативным, т. е. присылать его в ЗФТШ на проверку не обязательно, но мы настоятельно рекомендуем Вам внимательно проработать его. По желанию можете прислать тетрадь с решёнными задачами на проверку.

Составитель:  
**Городецкий Сергей Евгеньевич**

Заочная физико-техническая школа  
Московского физико-технического института  
(государственного университета)  
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.  
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**,  
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**.  
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**.

**e-mail:** [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru)

**Наш сайт:** [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)

© ЗФТШ, 2017

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел  $1, 2, \dots, n, \dots$ . В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными на множестве натуральных чисел. Поэтому вводятся множества целых и рациональных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел. Здесь, например, при извлечении корня из положительного числа вводятся иррациональные числа. Однако, решение алгебраических уравнений второй степени и выше привело к необходимости извлекать корень из любого действительного числа: так появились комплексные числа.

## §1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

**1. Алгебраическая форма комплексного числа.** Для того, чтобы извлекать квадратный корень из отрицательного действительного числа, множество действительных чисел было расширено: к нему добавили новое число  $i$ , такое что  $i^2 = -1$ . Операции умножения этого числа на любое действительное число и сложения его с действительным числом привели к понятию комплексного числа. Комплексными числами называют выражения вида  $a + bi$ , в которых  $a$  и  $b$  – любые действительные числа, и для которых следующим образом вводится понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа  $a + bi$  и  $c + di$  равны тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ ; (пишут  $a + bi = c + di$ )

б) суммой чисел  $a + bi$  и  $c + di$  называется число

$$a + c + (b + d)i;$$

в) произведением чисел  $a + bi$  и  $c + di$  называется число

$$ac - bd + (ad + bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i, \quad (1)$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i. \quad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой  $z$  или  $w$ ). Равенство  $z = a + bi$  означает, что комплексное число  $a + bi$  обозначено буквой  $z$ , при этом действительное число  $a$  называется *действительной частью* комплексного числа  $z = a + bi$  и обозначается  $\operatorname{Re} z$ ; пишут  $\operatorname{Re} z = a$  или  $\operatorname{Re}(a + bi) = a$ . Число  $b$  называется *мнимой частью* числа  $z = a + bi$  и обозначается  $\operatorname{Im} z$ ; пишут  $\operatorname{Im} z = b$  или  $\operatorname{Im}(a + bi) = b$ . Символ  $i$  называется *мнимой единицей*.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами вида  $a + 0i$  проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a + 0i) + (c + 0i) = a + c + 0i,$$

$$(a + 0i)(c + 0i) = ac + 0i.$$

Таким образом, отождествив число  $a + 0i$  с действительным числом  $a$ , получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел и  $a = a + 0i$ . В частности, число  $0 = 0 + 0i$  будет, как обычно, называть нулём, а число  $1 = 1 + 0i$  – единицей.

Числа вида  $0 + bi$  называют *чисто мнимыми* и обозначаются  $bi$ :

$$0 + 5i = 5i, \quad 0 - 2i = -2i.$$

На основании формулы (2) найдём значение выражения  $i^2 = i \cdot i$ :

$$i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Т. е.,

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т. к. она получается автоматически, если перемножить двучлены  $a + bi$  и  $c + di$ , а затем на основании формулы (3) заменить  $i^2$  на  $-1$ .

**Пример 1.** Найдите сумму и произведение комплексных чисел  $z_1 = 8 + 3i$  и  $z_2 = -5 + 2i$ . По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3 + 2) = 3 + 5i.$$

Формально перемножая двучлены  $(8 + 3i)$  и  $(-5 + 2i)$  и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(-5 + 2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

**2. Свойства операций над комплексными числами.** Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения:*  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$ .
2. *Ассоциативность сложения:*  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$ .
3.  $z + 0 = z$  для любого комплексного числа  $z$ .
4. Для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  существует число  $z$  такое, что  $z_1 + z = z_2$ . Это число называется *разностью* чисел  $z_2$  и  $z_1$  и обозначается  $z_2 - z_1$ .
5. *Коммутативность умножения:*  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  для любых  $z_1, z_2$ .
6. *Ассоциативность умножения:*  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  для любых  $z_1, z_2, z_3$ .
7. *Дистрибутивный закон:*  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$  для  $z_1, z_2, z_3$ .

8.  $1 \cdot z = z$  для любого комплексного числа  $z$ .

9. Для любых двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_2 \neq 0$ , существует число  $z$ , такое, что  $z_2 z = z_1$ . Это число называется *частным* комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначается  $\frac{z_1}{z_2}$ . Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения. Докажем свойства 4 и 9; остальные докажите самостоятельно.

*Свойство 4.* Пусть  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ ,  $z = x + yi$ . Тогда равенство  $z_1 + z = z_2$  запишется в виде  $c + di = (a + bi) + (x + yi) = a + x + (b + y)i$ . Отсюда следует, что  $x$  и  $y$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a + x = c \\ b + y = d \end{cases}, \text{ откуда } x = c - a, y = d - b \text{ и}$$

$$z_2 - z_1 = (c - a) + (d - b)i \quad (4a)$$

*Свойство 9.* Пусть опять  $z_1 = a + bi$ ,  $z = x + yi$ ,  $z_2 = c + di$ , и хотя бы одно из чисел  $c$  и  $d$  отлично от нуля. Тогда равенство  $z z_2 = z_1$  запишется так:  $a + bi = (x + yi)(c + di) = xc - yd + (xd + yc)i$ . Отсюда  $x$  и  $y$  удовлетворяют системе уравнений: 
$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4б)$$

**Пример 2.** Найдите разность  $z_1 - z_2$  и частное  $\frac{z_1}{z_2}$  комплексных чисел

$$z_1 = -1 + 3i \text{ и } z_2 = 5 - 2i.$$

По формуле (4a) находим разность

$$z_1 - z_2 = (-1 + 3i) - (5 - 2i) = -1 - 5 + (3 - (-2))i = -6 + 5i.$$

По формуле (4б) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 \cdot 5 + 3(-2)}{5^2 + (-2)^2} + i \frac{3 \cdot 5 - (-1)(-2)}{5^2 + 2^2} = \frac{-11}{29} + \frac{13}{29}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4б).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены; записи вида  $z > 3 + i$  и им подобные лишены всякого смысла. Невозможно перенести понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, так, чтобы при этом сохранились все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, сохранение знака неравенства при умножении обеих его частей на положительное число и т. п.). Покажем, например, что числа  $i$  и  $0$  сравнить невозможно.

Предположим, что  $i > 0$ . Тогда умножая обе части неравенства на  $i$  (по предположению  $i > 0$ , поэтому знак неравенства не меняем), получаем  $i^2 > 0$ , т. е.  $-1 > 0$ , что неверно. Предположим, что  $i < 0$ . Тогда, умножая обе части неравенства на  $i < 0$ , снова получим, что  $i^2 > 0$ .

Таким образом, сравнить числа  $i$  и  $0$  невозможно.

**Пример 3.** Найдите сумму, разность и произведение комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = a - bi$ . Находим по формулам (1) и (4а):

$$z_1 + z_2 = a + bi + (a - bi) = 2a, \quad z_1 - z_2 = 2bi.$$

Находим по формуле (2) или формально перемножая двучлены:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Пусть  $z = a + bi$ . Тогда число  $a - bi$  называется *комплексно сопряжённым* числу  $z = a + bi$  и обозначается  $\bar{z}$ .  $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$ . Пример 3 показывает, что сумма двух комплексно сопряжённых чисел  $z + \bar{z}$  является всегда числом действительным, а их разность является чисто мнимым числом; произведение  $z\bar{z}$  также всегда число действительное и более того, неотрицательное. Ясно также что число, сопряжённое числу  $\bar{z}$  равно  $z$ :  $\overline{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$ ; если  $z$  — действительное число  $z = a$ , то  $\bar{z} = a = z$ . Кроме того, справедливы следующие утверждения о комплексно сопряжённых числах:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (5а)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad (5б)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (5в)$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \text{ если } z_2 \neq 0 \quad (5г)$$

Докажем, например (5в). Пусть  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ . Тогда

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i.$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i = ac - bd - (ad + bc)i.$$

Из (5в) при  $z = z_1 = \underline{z_2}$  следует:  $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$  и аналогично для любой натуральной степени  $n$ :  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ . (5д)

## §2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

### Модуль и аргументы комплексного числа

**1. Комплексная плоскость.** Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждое комплексное число  $z = a + ib$  задаётся парой действительных чисел  $(a; b)$ . Эта же пара чисел может рассматриваться в качестве координат точки  $M(a, b)$  на координатной плоскости. Поэтому каждому комплексному числу  $z = a + ib$  поставим в соответствие точку  $M(a, b)$  координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна  $\operatorname{Re} z = a$ , а ордината равна  $\operatorname{Im} z = b$ . Обратно, каждой точке плоскости с координатами  $(a, b)$  поставим в соответствие комплексное число  $z = a + bi$ .

Так построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т. к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам  $a + i0$ , т. е. действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам  $0 + bi$ .

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа  $a + bi$  как вектора  $\overline{OM}$  с началом в точке  $O(0, 0)$  и концом в точке  $M(a, b)$  (см. рис. 1). Так каждому вектору плоскости с началом в точке  $O(0, 0)$  концом в точке  $M(a, b)$  соответствует комплексное число  $a + bi$  и наоборот. При этом нулевому вектору соответствует комплексное число  $0 + 0i$ .

### 2. Модуль комплексного числа.

**Определение.** Модулем комплексного числа  $z = a + bi$  называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается  $|z|$  или буквой  $r$ . Применяя теорему Пифагора, получим, что

$$|OM| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{см. рис. 1}).$$

Если  $z = a + 0i$ , то  $|z| = \sqrt{a^2 + 0} = |a|$ , т. е. для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что  $|z| > 0$  для всех  $z \neq 0$ ;  $|z| = 0$  тогда и только тогда, когда  $z = 0 + 0i = 0$ .

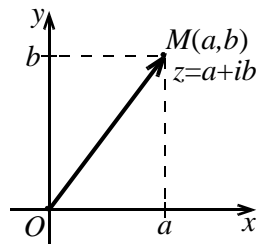


Рис. 1

Перечислим основные свойства модуля комплексного числа:

$$|\bar{z}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{См. рис. 2}). \quad (6.1)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 \quad (\text{из примера 3}) \quad (6.2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (6.3)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{если } z_2 \neq 0 \quad (6.4)$$

Докажем, например, (6.3). Пусть  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ . Тогда  $z_1 z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$ ,

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2acbd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2adbc} = \\ &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2) + d^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

Используя свойства модуля, можно получить более простую формулу для деления комплексных чисел, чем (4б). Число  $\frac{1}{z}$  запишем в виде:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left( \frac{1}{z_2} \right) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad \text{при } z_2 \neq 0. \quad (7)$$

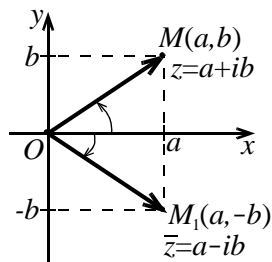


Рис. 2

Формула (7) сводит операцию деления комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  к умножению чисел  $z_1$  и  $\bar{z}_2$  и делению этого произведения на действительное число  $|z_2|^2$ .

**Пример 4.** Найдите частное  $\frac{2 - 3i}{-1 + 5i}$ .

По формуле (7) имеем:

$$\frac{2 - 3i}{-1 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(-1 - 5i)}{|-1 + 5i|^2} = \frac{-2 + 15i^2 + 3i - 10i}{1^2 + 5^2} = -\frac{17}{26} - \frac{7}{26}i.$$



**3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.** Изображение комплексных чисел с помощью векторов удобно тем, что при этом операции сложения и вычитания чисел получают простое геометрическое толкование. Так, при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части:  $z = z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$ . Так же выполняется и операция сложения векторов  $\overrightarrow{OM_1}(a, b)$  и  $\overrightarrow{OM_2}(c, d) : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (a + c, b + d)$ . Иначе: если числу  $z_1$  соответствует вектор  $\overrightarrow{OM_1}$ , а числу  $z_2$  – вектор  $\overrightarrow{OM_2}$ , то числу  $z_1 + z_2$  соответствует вектор  $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$  (см. рис. 3). Это же относится и к разности комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2 : z = z_1 - z_2 = a - c + (b - d)i$  и  $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (a - c, b - d)$ , т. е. числу  $z_1 - z_2$  соответствует вектор  $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ . При этом число  $|z_1 - z_2|$  есть, по определению модуля, длина вектора  $z_1 - z_2$ . (На рис. 3  $|z_1 - z_2|$  есть длина вектора  $\overrightarrow{M_2M_1}$ ). Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам*. Теперь, используя геометрический смысл операций с комплексными числами, решим следующие задачи.

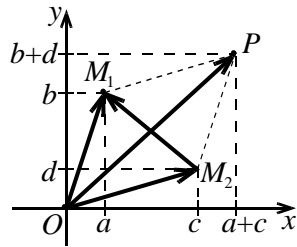


Рис. 3

**Пример 5.** Найдите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: а)  $|z - i| = 1$ ;

б)  $1 < |z + 3 + i| < 3$ ; в)  $|z - 2 + i| \geq |z + 3 - 4i|$ ;

г)  $|z^2| - 6z - \overline{6z} = 0$ ; д)  $|z - 1| = 2|z + 2|$ .

а) Условию  $|z - i| = 1$  удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки  $i$  на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке  $i$  (см. рис. 4).

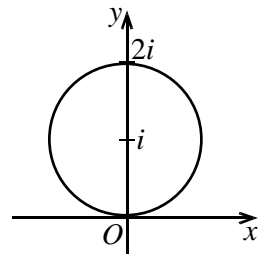


Рис. 4

б) Здесь  $|z+3+i|=|z-(-3-i)|$ . Условию  $1 < |z+3+i| < 3$  удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки  $(-3, -i)$  на расстояние, большее 1, но меньшее 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя concentрическими окружностями с центром в точке  $(-3, -1)$  и радиусами  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 3$  (рис. 5).

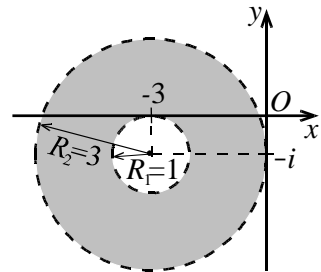


Рис. 5

Искомое множество заштриховано.

в) Рассмотрим сначала равенство  $|z-2+i|=|z+3-4i|$ . Перепишем его в виде  $|z-(2-i)|=|z-(-3+4i)|$ , т. е. расстояние от точки  $z$  до точки  $z_1 = 2-i$  равно расстоянию от точки  $z$  до точки  $z_2 = -3+4i$ . Из геометрии известно, что это серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки  $M_1(2; -1)$  и  $M_2(-3; 4)$ . На рис. 6 это прямая

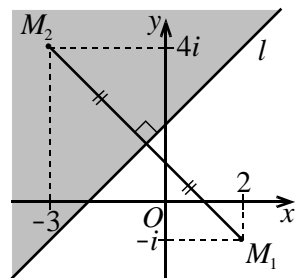


Рис. 6

$l$ . Тогда точки, удовлетворяющие неравенству  $|z-2+i| \geq |z+3-4i|$ , лежат на плоскости ближе к точке  $M_2$ , чем к точке  $M_1$ , т. е. на прямой  $l$  или выше неё.

г) Пусть  $z = x+iy$ . Тогда равенство  $|z|^2 - 6z - 6\bar{z} = 0$  примет вид  $x^2 + y^2 - 6(x+iy) - 6(x-iy) = 0$ . Отсюда  $x^2 + y^2 - 12x = 0$ , или  $(x-6)^2 + y^2 = 36$ . Это уравнение окружности с центром в точке  $M(6; 0)$  и радиусом  $R = 6$  (см. рис. 7).

д) Пусть  $z = x+iy$ . Тогда

$$\begin{aligned} |x-1+iy| &= 2|x+2+iy| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4(x^2 + 4x + 4 + y^2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 18x + 3y^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 4.$$

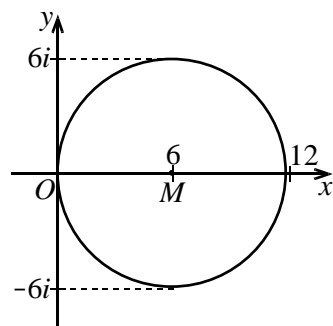


Рис. 7

Это окружность с центром в точке  $M(-3;0)$  и радиусом 2 (см. рис. 8). Т. е. точки лежат на окружности радиуса 2 с центром в точке  $z = -3$ .

**4. Аргументы комплексного числа.** Аргументом комплексного числа  $z = a + bi$  ( $z \neq 0$ ) называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором  $z = \vec{OM}(a, b)$ ; величина угла считается положительной, если отсчёт угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчёт производится по часовой стрелке. Для числа  $z = 0$  аргумент не определён.

Для обозначения того, что число  $\varphi$  является аргументом числа  $z = a + bi$ , пишут  $\varphi = \arg z$  или  $\varphi = \arg(a + bi)$ . (См. рис. 9).

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число  $z = a + bi$  определяется однозначно. Пусть  $|\vec{OM}| = r$ ; тогда  $a = \operatorname{Re} z = r \cos \varphi$  и  $b = \operatorname{Im} z = r \sin \varphi$ .

С другой стороны, если задано комплексное число, то модуль этого числа всегда определён однозначно, в отличие от аргумента, который определяется неоднозначно: если  $\varphi$  – некоторый аргумент числа  $z$ , то углы  $\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  являются аргументами того же числа  $z$ . Например,

аргументами числа  $(1 - i)$  являются углы  $-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}$  и т. д. (см. рис. 10).

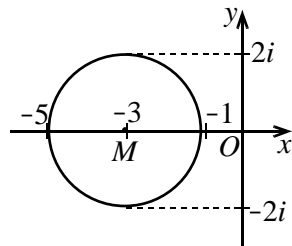


Рис. 8

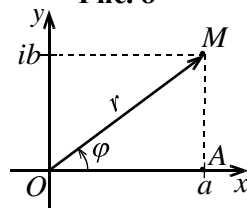


Рис. 9

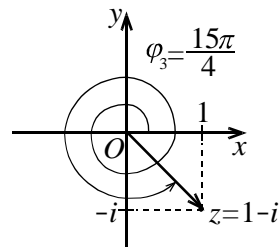
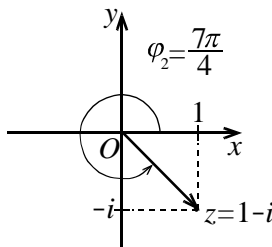
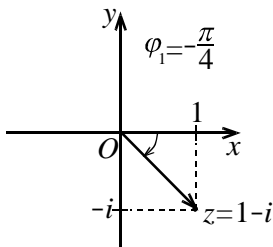


Рис. 10

Таким образом, для каждого числа  $z \neq 0$  имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное  $2\pi$ .

Если комплексное число  $z$  задано в алгебраической форме:  $z = a + bi$  и  $\varphi = \arg z$ , то справедливы равенства (см. рис. 9):

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|}. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) также следует: если  $\varphi = \arg(a + bi)$ ,  $a \neq 0$ , то  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ .

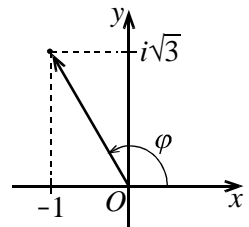
При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа  $z = a + bi$  удобно использовать *геометрическую интерпретацию* комплексного числа  $z$  для определения той четверти, где находится точка  $z = a + bi$ , а затем воспользоваться одним из уравнений (8). Заметим, что аргументы чисел  $z$  и  $\bar{z}$ ,  $z \neq 0$ , связаны соотношением  $\arg \bar{z} = -\arg z$  (см. рис. 2).

**Пример 6.** Найдите аргументы числа

а)  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ; б)  $z_2 = -1 - i$ .

а) Так как  $\operatorname{Re} z_1 = -1 < 0$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0$ , то точка  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$  лежит во II четверти. Поэтому надо найти решение одного из уравнений (8), которое является углом II четверти. Получаем

$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) Здесь  $\operatorname{Re} z_2 = -1 < 0$ ,  $\operatorname{Im} z_2 = -1 < 0$ , т. е. точка  $z_2 = -1 - i$  лежит в III четверти (см. рис.). Следовательно, надо найти такое решение уравнения

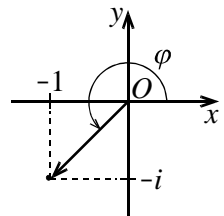
$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1, \quad \text{которое является углом III четверти.}$$

Получаем  $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что если  $a = 0$ , (тогда  $z = bi$ ),

то либо  $\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (если  $b > 0$ ),

либо  $\arg z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (если  $b < 0$ ).



### §3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

**1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.** Запись комплексного числа в виде  $z = a + bi$  называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другую форму записи комплексных чисел. Пусть  $r$  – модуль, а  $\varphi$  – какой-либо из аргументов комплексного числа  $z = a + bi$ , то есть  $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\varphi = \arg(a + bi)$ . Тогда из формулы (8) следует, что  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ , и,

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

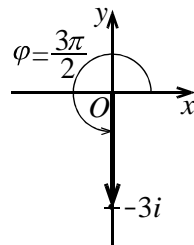
Запись комплексного числа в виде  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

**Пример 7.** Запишите число в тригонометрической форме: а)  $z_1 = -3i$ ;  
б)  $z_2 = \sqrt{3} - i$ .

а) Отметим число  $z_1 = -3i$  на комплексной плоскости (см. рис.). Этому числу соответствует точка  $M(0; -3)$ .  $|z_1| = |OM| = 3$ . В качестве аргумента  $z_1$  можно выбрать  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ . (Угол поворота изображён на

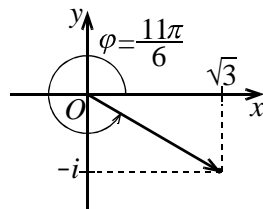


рисунке). Значит,  $-3i = 3 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ .

б) Находим модуль

$$r = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2.$$

Находим один из аргументов; так как  $\operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3} > 0$ ,  $\operatorname{Im} z_2 = -1 < 0$ , то число  $\sqrt{3} - i$  лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ , которое является



углом в IV четверти – например, это  $\varphi = \frac{11\pi}{6}$ . Тогда

$$\sqrt{3} - i = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

**Пример 8.** Запишите число в тригонометрической форме:

а)  $z_1 = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)i$ ; б)  $z = 1 + \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha, \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Решение.** а)  $z_1 = 2(-\sin 40^\circ + i \cos 40^\circ)$ , но эта форма не является тригонометрической формой числа  $z_1$ . Имеем  $|z_1| = \sqrt{4(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)} = 2$ . Согласно определению  $\arg z$  нам надо найти такой угол  $\varphi$ , для которого  $\begin{cases} \cos \varphi = -\sin 40^\circ < 0 \\ \sin \varphi = \cos 40^\circ > 0 \end{cases}$ . Тогда  $\varphi$  лежит во II четверти и из тригонометрических формул приведения имеем  $\varphi = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$ . Отсюда тригонометрическая форма числа  $z_1$  следующая:  $z_1 = 2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$ .

б) Здесь  $|z|^2 = (1 + \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 2 + 2\cos 2\alpha = 4\cos^2 \alpha$ ; отсюда  $|z_2| = -2\cos \alpha$  (т. к.  $\alpha$  – угол III четверти).  $\operatorname{tg}(\arg z_2) = -\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = -\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$ , откуда  $\arg z_2 = -\alpha + \pi k$ . Так как  $\operatorname{Re} z = 1 + \cos 2\alpha > 0$ ,  $\operatorname{Im} z = -\sin 2\alpha < 0$ , то число  $z$  лежит в IV четверти, и в качестве аргумента можно выбрать  $\arg z_2 = \pi - \alpha$ .

Тогда тригонометрическая форма числа  $z_2$ :

$$z_2 = -2\cos \alpha \cdot (\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)).$$

## 2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ .

Тогда  $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cdot (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ . (9)

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения есть сумма аргументов сомножителей.*

Пусть  $z_2 \neq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного является разностью аргументов делимого и делителя.*

### 3. Возведение в степень и извлечение корня

Формула (9) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай  $n$  сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – аргументы чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответственно, то  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 \dots z_n)$ ,

$$|z_1| |z_2| \dots |z_n| = |z_1 z_2 \dots z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (11)$$

Таким образом, при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Формулу (11) называют *первой формулой Муавра*.

**Пример 9.** Найдите  $z^9$ , если  $z = -1 + \sqrt{3}i$ .

Так как  $|-1 + \sqrt{3}i| = 2$ , а одним из аргументов является  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  (см. пример 6 на стр. 12), то

$$z = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Применяя формулу (11), получаем

$$z^9 = 2^9 \left( \sin \frac{18\pi}{3} + i \sin \frac{18\pi}{3} \right) = 2^9 (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 2^9 (1 + 0i) = 512.$$

Формулы операций над комплексными числами в тригонометрической форме позволяют дать геометрическую интерпретацию умножения или деления на комплексное число. Пусть число  $z$  записано в тригонометрической форме:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  и ему отвечает на комплексной плоскости вектор  $\overline{OM}$  ( $r \cos \varphi, r \sin \varphi$ ). Тогда при умножении этого числа  $z$ , например, на число

$2i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ , получим число  $z_1 = 2iz$ , которому соответствует

вектор  $\overline{OM_1}$ . При этом  $|\overline{OM_1}| = |2i| |\overline{OM}| = 2r$ , а

$\arg z_1 = \arg z + \arg (2i) = \arg z + \frac{\pi}{2}$ . Таким образом, вектор  $\overline{OM_1}$  получается из вектора  $\overline{OM}$  с помощью двух преобразований: поворота на угол  $\frac{\pi}{2}$  и увеличения длины в 2 раза. Формулы (9) – (11) также часто

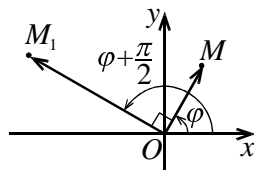


Рис. 11

упрощают операции умножения и деления комплексных чисел. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 10.** Выполните арифметические операции:

$$\frac{(2 \sin 27^\circ - 2i \cos 153^\circ)^3 i^{103}}{-\cos 39^\circ - i \sin 39^\circ}.$$

**Решение.** Пусть  $z = \frac{z_1^3}{z_2} i^{103}$ , где  $z_1 = 2(\sin 27^\circ - i \cos 153^\circ)$ ,  $z_2 = -(\cos 39^\circ + i \sin 39^\circ)$ . Число  $z_1$  представим в тригонометрической

форме.  $|z_1| = \sqrt{4 \sin^2 27^\circ + 4(-\cos 153^\circ)^2} = 2\sqrt{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ} = 2$ .  $\operatorname{Re} z_1 = 2 \sin 27^\circ > 0$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = -2 \cos 153^\circ > 0$ , т. е.  $\varphi_1 = \arg z_1$  – угол I четверти. По формулам (8) имеем:

$$\cos \varphi_1 = \frac{2 \sin 27^\circ}{2} = \sin 27^\circ, \quad \sin \varphi_1 = \frac{-2 \cos 153^\circ}{2} = -\cos 153^\circ = \cos 27^\circ.$$

Тогда по тригонометрическим формулам приведения  $\varphi_1 = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$  и  $z_1 = 2(\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ)$ . Значит,

$z_1^3 = 2^3(\cos 189^\circ + i \sin 189^\circ)$ . Далее  $|z_2| = \sqrt{(-\cos 39^\circ)^2 + (-\sin 39^\circ)^2} = 1$ .  $\operatorname{Re} z_2 = -\cos 39^\circ < 0$ .  $\operatorname{Im} z_2 = -\sin 39^\circ < 0$ . Тогда  $\varphi_2 = \arg z_2$  – угол в III четверти и из формул (8):  $\cos \varphi_2 = -\cos 39^\circ$ ,  $\sin \varphi_2 = -\sin 39^\circ$ , отсюда  $\varphi_2 = 180^\circ + 39^\circ = 219^\circ$ ,  $z_2 = \cos 219^\circ + i \sin 219^\circ$ .

$$i^{103} = \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{103} = \cos \frac{103\pi}{2} + i \sin \frac{103\pi}{2} = \cos \left( \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} z &= \frac{8(\cos 189^\circ + i \sin 189^\circ)(-i)}{\cos 219^\circ + i \sin 219^\circ} = -8i(\cos(189^\circ - 219^\circ) + i \sin(189^\circ - 219^\circ)) = \\ &= -8i(\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)) = -8i \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -4 - 4\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

**Пример 11.** Вычислите сумму  $S = 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$ .

**Решение.** Если  $\cos \varphi = 1$ , то  $\varphi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $\cos 2\varphi = \cos 3\varphi = \dots = \cos n\varphi = 1$  и  $S = n + 1$ . Рассмотрим такое  $\varphi$ , что  $\cos \varphi \neq 1$ . Пусть  $U = S + iT$ , где  $S = 1 + \cos \varphi + \dots + \cos n\varphi$ ,  $T = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$ . Тогда  $S = \operatorname{Re}(U)$ . Комплексное число  $U$  имеет вид:

$U = 1 + (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) =$  (из (11))  $= 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ , где  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Тогда  $U$  – это сумма



$(n+1)$  членов геометрической прогрессии с первым членом  $b_1=1$  и знаменателем  $q=z$ , т. е.

$$U = \frac{1 \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{\cos((n+1)\varphi) - 1 + i \sin((n+1)\varphi)}{\cos \varphi - 1 + i \sin \varphi}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S = \operatorname{Re} U &= \operatorname{Re} \left( \frac{(\cos(n+1)\varphi) - 1 + i \sin((n+1)\varphi)(\cos \varphi - 1 - i \sin \varphi)}{(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{\cos((n+1)\varphi) \cos \varphi - \cos((n+1)\varphi) - \cos \varphi + 1 + \sin((n+1)\varphi) \sin \varphi}{2 - 2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{\cos n\varphi - \cos((n+1)\varphi) - \cos \varphi + 1}{2 - 2 \cos \varphi}. \end{aligned}$$

**Пример 12.** Дано число  $U = \left( \sin \frac{\pi}{20} + i \cos \frac{\pi}{20} \right)^5$ .

а) Запишите число  $U$  в тригонометрической и алгебраической форме.

б) Изобразите на комплексной плоскости множество  $D$  комплексных чисел  $z$ , таких что  $|U(z + \sqrt{2}U)| < 1$ . в) Изобразите на комплексной плоскости множество  $D_1$  комплексных чисел  $z_1$  вида  $\{z_1 = z(1-i), z \in D\}$ . г) Найдите наибольшее и наименьшее значение  $|z|$  для всех чисел  $z$ , таких что  $|U(z + \sqrt{2}U)| = 1$ .

**Решение.** а) Число  $U = z_0^5$ , где  $z_0 = \sin \frac{\pi}{20} + i \cos \frac{\pi}{20}$ . Запишем  $z_0$  в тригонометрической форме.

$$|z_0| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{20} + \cos^2 \frac{\pi}{20}} = 1. \operatorname{Re} z_0 = \sin \frac{\pi}{20} > 0, \operatorname{Im} z_0 = \cos \frac{\pi}{20} > 0, \quad \text{т. е.}$$

$\varphi = \arg z_0$  – угол I четверти и по формулам (8)

$$\cos \varphi = \sin \frac{\pi}{20}, \sin \varphi = \cos \frac{\pi}{20}; \quad \text{тогда} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20},$$

$$z_0 = \cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20}. \text{ Теперь ответ}$$

$$\text{а) } U = z_0^5 = \cos\left(\frac{45\pi}{20}\right) + i \sin\left(\frac{45\pi}{20}\right) = \cos\frac{9\pi}{4} + i \sin\frac{9\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

б) По свойству модуля имеем:

$$\left|U(z + \sqrt{2}U)\right| = |U||z + \sqrt{2}U| = |z + \sqrt{2}U|, \text{ т. к. } |U| = 1.$$

Тогда множество  $D$  задаётся условием,  $|z + \sqrt{2}U| < 1$ , т. е. как и в примере 4 выше  $D$  – это множество точек  $z$  на комплексной плоскости, расстояние от которых до точки  $M = -\sqrt{2}U = -1 - i$  меньше 1. Это множество: круг с центром в точке  $M(-1; -1)$  и радиусом  $r = 1$ . На рис. 12а множество закрашено.

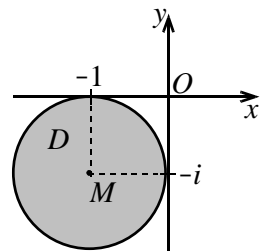


Рис. 12а

$$\text{в) } |1 - i| = \sqrt{2}, \arg(1 - i) = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Тогда согласно указанному выше геометрическому смыслу умножения на комплексное число  $1 - i$ : модуль всех чисел  $z \in D$  увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз. Аргументы всех этих чисел

изменяются на  $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ . Поскольку

$-\sqrt{2}U(1 - i) = -(1 + i)(1 - i) = -2$ , то образом точки  $M$  – центра круга  $D$  будет точка  $M_1(-2, 0)$ . Тогда

$D_1$  – это внутренняя часть круга с

центром в точке  $M_1$  и радиуса  $r_1 = r\sqrt{2} = \sqrt{2}$ . На рис. 12б множество заштриховано.

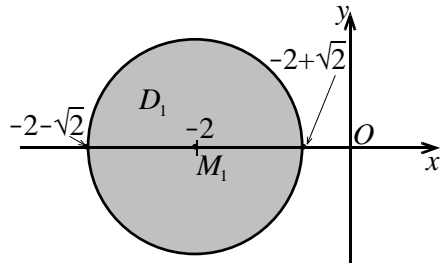


Рис. 12б

г) Согласно п. б) множество  $D_2 : \left|U(z + \sqrt{2}U)\right| = 1$  задаётся условием

$|z + \sqrt{2}U| = 1$ , или  $|z - (-1 - i)| = 1$ , т. е.  $D_2$  – это окружность – граница круга  $D$ . Из тригонометрической формы записи комплексного числа следует, что все числа  $z$ , лежащие на единичной окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , можно задать в виде  $\{z = \cos \varphi + i \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$ . Тогда числа  $z$ , лежащие на окружности  $D_2$  с центром в точке  $-1 - i$  запишем в виде:

$$\{z = -1 - i + \cos \varphi + i \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\} \text{ или } z = -1 + \cos \varphi + i(-1 + \sin \varphi).$$

В этом случае  $|z|^2 = (-1 + \cos \varphi)^2 + (-1 + \sin \varphi)^2 =$

$$= 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + 1 - 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi = 3 - 2(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

По формулам тригонометрии выражение  $\cos \varphi + \sin \varphi$  можно предста-

вить в виде:  $\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ . Тогда при  $\varphi \in [0; 2\pi]$  значе-

ния  $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$  и  $-\sqrt{2} \leq \cos \varphi + \sin \varphi \leq \sqrt{2}$ . Значит наибольшее

(наименьшее) значение  $|z|$  при  $z \in D_2$  равно наибольшему (наимень-

шему) значению  $\sqrt{3 - 2(\cos \varphi + \sin \varphi)}$  при  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Тогда ответ г):  
наибольшее значение  $|z|$  равно  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ , наименьшее значе-

ние  $|z|$  равно  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ .

#### 4. Извлечение корня из комплексного числа

Перейдём к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа. Число  $z$  называется *корнем степени  $n$* ,  $n \in \mathbb{N}$ , из числа  $\omega$  (обозначается  $\sqrt[n]{\omega}$ ), если  $z^n = \omega$ .

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени  $n$  из числа  $\omega$ , нужно решить уравнение  $z^n = \omega$ . Если  $\omega = 0$ , то при любом  $n$  уравнение  $z^n = 0$  имеет единственное решение  $z = 0$ . Пусть теперь  $\omega \neq 0$ .

Представим  $z$  и  $\omega$  в тригонометрической форме:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $\omega = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ . Тогда уравнение  $z^n = \omega$

примет вид:  $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ . Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное  $2\pi$ . Следовательно,

$r^n = r_0$ ,  $n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , или  $r = \sqrt[n]{r_0}$ ,  $\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, все решения уравнения  $z^n = \omega$  даются формулой:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (12)$$

В самом деле, придавая числу  $k$  в формуле (12) целые значения, отличные от  $0, 1, \dots, (n-1)$ , не получим других комплексных чисел. Например, при  $k = n$  получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0} \left( \left( \cos \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \frac{\varphi_0}{n} + i \sin \frac{\varphi_0}{n} \right) = z_0.$$

Формула (12) называется второй формулой Муавра. Таким образом, если  $\omega \neq 0$ , то существует ровно  $n$  корней степени  $n$  из числа  $\omega$ . В частности, если  $n = 2$ , то уравнение  $z^2 = \omega$  имеет два корня:

$$z_0 = \sqrt{r_0} \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad z_1 = \sqrt{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) \right) = -z_0,$$

т. е. эти корни симметричны относительно начала координат.

Отметим также, что при извлечении квадратного корня из действительного положительного числа  $x$  мы получаем два значения  $\pm\sqrt{x}$ , а при извлечении корня из действительного отрицательного числа  $x$  — два значения  $\pm i\sqrt{-x}$ . При  $n > 2$  все значения корня из действительного положительного числа  $x$  имеют вид:

$$z_k = \sqrt[n]{x} \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Здесь  $z_0 = \sqrt[n]{x}$  — арифметическое значение корня. Если при представлении числа в тригонометрической форме получаются не табличные значения углов, то для извлечения корня удобнее использовать приём, применённый ниже в п.1 §4.

Также из формулы (12) следует, что если  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ , то точки, изображающие все корни уравнения  $z^n = \omega$ , являются вершинами правильного  $n$  — угольника, вписанного в окружность с центром в точке  $z = 0$  и радиусом  $\sqrt[n]{|\omega|}$ .

**Пример 13.** Найдите все значения а)  $\sqrt[3]{-8}$ ,  
б)  $\sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$ .

**Решение.** а) Запишем число  $\omega = -8$  в тригонометрической форме:  $\omega = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ . Применяя формулу (12) получаем:

$$z_k = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно:  $z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i, z_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$

$z_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$  Точки, соответствующие числам

$z_0, z_1, z_2$  находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке  $z = 0$  (см. рис. 13а).

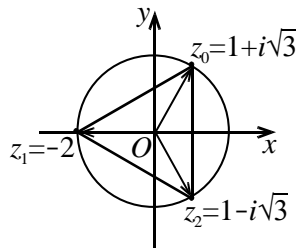


Рис. 13а

б) Из примера 9 тригонометрическая форма числа  $\omega = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ . Тогда по формуле (12)

$$z_k = \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}k\right) \right), k = 0, 1, 2, 3. \quad \text{т. е.}$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left( \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left( \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left( \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt[4]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \left( \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} \right) = -\sqrt[4]{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

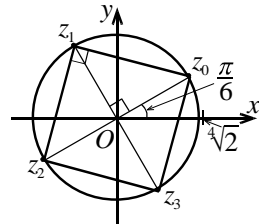


Рис. 13б

Эти точки – вершины квадрата, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[4]{2}$  с центром в точке  $z = 0$  (см. рис. 13б).

#### §4. Алгебраические уравнения

**1. Квадратные уравнения.** В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (13)$$

с действительными коэффициентами  $a, b, c$ . Там было показано, что если дискриминант уравнения (13) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \quad (14)$$

В случае, если  $D < 0$ , говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (14) использовался приём выделения квадрата из трёхчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = a \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \right),$$

откуда и получалась формула (14). Очевидно, что все эти выкладки останутся справедливыми и в том случае, когда  $a, b, c$  являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются на множестве комплексных чисел.

Таким образом, на множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

всегда разрешимо. Если  $D = b^2 - 4ac = 0$ , уравнение имеет один корень (2 совпадающих корня или один корень кратности 2); при  $D \neq 0$  уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула  $z = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ , где под  $\sqrt{D}$  подразумеваются все значения корня<sup>1</sup>.

**Пример 14.** Решите уравнение  $z^2 + z + 1 = 0$ .

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Так как  $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$ , то  $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

При решении квадратного уравнения с комплексными коэффициентами число  $D$  в формуле (14) также будет комплексным. Тогда, чтобы вычислить  $\sqrt{D}$  по формуле (12) надо приводить число  $D$  к тригонометрической форме. При вычислении квадратного корня может быть более удобным другой способ, не требующий использовать тригонометрическую форму. Покажем как это делать. Пусть число  $\omega$  имеет вид  $\omega = u + iv$ ,  $v \neq 0$ . Тогда числа  $\sqrt{\omega}$  – это решения уравнения  $z^2 = \omega$ . Если  $z$  – комплексное число вида  $z = x + iy$ , то уравнение  $z^2 = \omega$  примет вид  $(x + iy)^2 = u + iv$  или  $x^2 - y^2 + 2xyi = u + vi$ . Отсюда, приравнявая вещественные и мнимые части, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v. \end{cases} \quad (15a)$$

Для решения этой системы можно выразить  $y$  из второго уравнения:

$y = \frac{v}{2x}$  (т. к.  $v \neq 0$ , то  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ ). Тогда первое уравнение примет

вид  $x^2 - \frac{v^2}{4x^2} = u$  или  $4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0$ . (15б)

Это биквадратное уравнение; сделав в нём замену переменной  $t = x^2$  (т. к.  $x$  – действительное число, то  $t$  – действительное число и  $t \geq 0$ ), получим квадратное уравнение для переменной  $t$ . Нам нужен только неотрицательный корень этого уравнения  $t_1 \geq 0$ . Далее  $x_{1,2} = \pm \sqrt{t_1}$ ,

<sup>1</sup> Если  $D$  – действительное положительное число, то  $\sqrt{D}$ , в отличие от действительных чисел, принимает два значения. Например,  $\sqrt{4} = \pm 2$ .

$y_{1,2} = \frac{v}{2x_{1,2}}$  и  $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$  – два значения  $\sqrt{\omega}$ , полученные в алгебраической форме.

**Пример 15.** Решите уравнение  $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$ .

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-(2i - 3) + \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(5 - i)}}{2} = \frac{3 - 2i + \sqrt{-15 - 8i}}{2}.$$

Для определения всех значений  $x + iy = \sqrt{-15 - 8i}$  по формуле (15а)

имеем систему  $\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$ , далее получаем  $4x^4 + 60x^2 - 64 = 0$ , от-

куда  $x^2 = 1$  или  $x^2 = -16$ . Значит,  $x_{1,2} = \pm 1$ ,  $y_{1,2} = -\frac{8}{2x_{1,2}} = \mp 4$ . Таким

образом,  $\sqrt{-15 - 8i} = \pm(1 - 4i)$ .

$$\text{Следовательно, } z_1 = \frac{3 - 2i + (1 - 4i)}{2} = 2 - 3i, \quad z_2 = \frac{3 - 2i + (-1 + 4i)}{2} = 1 + i.$$

**2. Уравнения высших степеней.** Формула (12) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения  $z^n = a$ , т. е. двучленного уравнения степени  $n$ . Гораздо сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени  $n$ :

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (16)$$

где  $a_0, \dots, a_n$  – заданные комплексные числа,  $a_n \neq 0$ .

Число  $z_0$  называется корнем многочлена  $P_n(z)$  или решением уравнения (16), если  $P_n(z_0) = 0$ .

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу*:

*остаток от деления многочлена  $P_n(z)$  на  $(z - z_0)$  равен  $P_n(z_0)$ .*

Действительно,  $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$ , где остаток  $r(z)$ , если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя  $z - z_0$ , т. е. степень остатка  $r(z)$  равна нулю. Следовательно,  $r(z) = r$  является числом:  $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r$ .

Положим в этом равенстве  $z = z_0$ . Получаем  $P_n(z_0) = 0 + r = r$ , что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если  $z_0$  корень многочлена  $P_n(z)$ , то  $P_n(z)$  делится на  $(z - z_0)$  и  $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$ .

**Пример 16.** Найдите остаток от деления многочлена  $F(z) = z^{1502} - 90z^{175} + 3$  на многочлен  $z^2 + 1$ .

**Решение.** Выполним деление с остатком:

$$z^{1502} - 90z^{175} + 3 = (z^2 + 1)Q(z) + az + b. \quad (17)$$

Числа  $z = \pm i$  являются корнями многочлена  $z^2 + 1$ , поэтому подставим их в равенство (17).

$$z = i \rightarrow i^{1502} - 90i^{175} + 3 = ai + b,$$

$$z = -i \rightarrow (-i)^{1502} - 90(-i)^{175} + 3 = -ai + b.$$

Так как  $i^{1502} = i^2 = -1$  и  $i^{175} = i^3 = -i$ , то, упрощая, получаем систему

$$\begin{cases} 2 + 90i = ai + b, \\ 2 - 90i = -ai + b. \end{cases}$$

Решение этой системы – это  $a = 90$  и  $b = 2$ , значит, остаток равен  $r(z) = 90z + 2$ .

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет на множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (16) всегда допускает представление в виде произведения

$$a_n(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}, \quad (18)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_k$  – некоторые различные комплексные числа, а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – натуральные числа, причём  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$  (доказательство может быть произведено индукцией по  $n$ ).

Отсюда следует, что числа  $z_1, z_2, \dots, z_k$  и только они являются корнями уравнения (16). При этом говорят, что  $z_1$  является корнем кратности  $\alpha_1, z_2$  – корнем кратности  $\alpha_2$  и т. д.

Если условиться считать корень уравнения столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени  $n$  имеет на множестве комплексных чисел ровно  $n$  корней.*

Отметим также следующее утверждение. *Если число  $z_0$  является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то  $\bar{z}_0$  тоже является корнем этого многочлена.* Покажем это.

Если  $z_0$  – корень многочлена  $P_n(z)$ , то  $P_n(z_0) = 0$ . Тогда

$$\overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0, \text{ то есть } \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0.$$

Пользуясь равенствами (5а)–(5д), получаем, что



$$\overline{a_n} (\overline{z_0})^n + \overline{a_{n-1}} \cdot (\overline{z_0})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} z_0 + \overline{a_0} = 0.$$

Поскольку числа  $\overline{a_0}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$  действительные, то

$$\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, \overline{a_0} = a_0.$$

Тогда,  $a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$ , что и означает, что число  $\overline{z_0}$  есть корень многочлена  $P_n$ .

Можно показать, что если для многочлена с действительными коэффициентами  $z_0$  – корень кратности  $k$ , то и  $\overline{z_0}$  – корень кратности  $k$ .

Разложение (18) для многочленов с действительными коэффициентами примет вид:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{\alpha_1} (z - \overline{z_1})^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} (z - \overline{z_2})^{\alpha_2} \dots \quad (19)$$

$$\dots (z - z_l)^{\alpha_l} (z - \overline{z_l})^{\alpha_l} \cdot (z - z_{l+1})^{\alpha_{l+1}} (z - z_{l+2})^{\alpha_{l+2}} \dots (z - z_m)^{\alpha_m},$$

причём  $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l) + \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \dots + \alpha_m = n$ .

Здесь  $z_1, z_2, \dots, z_l$  – комплексные числа;  $z_{l+1}, z_{l+2}, \dots, z_m$  – действительные числа.

Заметим, что  $(z - z_i) \cdot (z - \overline{z_i}) = z^2 - (z_i + \overline{z_i})z + z_i \overline{z_i}$  есть квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Мы получили следующее утверждение: *любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами.*

**Пример 17.** Решите уравнение: а)  $z^3 = -2\overline{z}$ ; б)  $|z| + iz = 3 - 5i$ .

**Решение.** а) Представим число  $z$  в тригонометрической форме:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Вспомним, что  $|\overline{z}| = |z|$ , а в качестве одного из аргументов числа  $\overline{z}$  можно выбрать  $(-\varphi)$ ; кроме того  $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$ . Тогда уравнение принимает вид:

$$\rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 2\rho (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) (\cos(\pi) + i \sin(\pi)). \quad (20)$$

Возможны два случая:

1)  $\rho = 0$ , тогда  $z = 0$ , и это решение уравнения.

2)  $\rho \neq 0$ . Тогда равенство (20) означает, что у чисел в левой и правой части равны модули, а аргументы отличаются на  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , т. е.

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho, \\ 3\varphi = -\varphi + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{2}, \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (21)$$

Несложно понять, что мы получим всевозможные решения, если подставим в (21) значения  $k = 0, 1, 2, 3$ .

$$\text{Итак, } z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i \text{ (при } k = 0);$$

$$z = \sqrt{2} \cos \left( \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i \text{ (при } k = 1);$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -1 - i \text{ (при } k = 2);$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 1 - i \text{ (при } k = 3).$$

**Ответ:**  $0; 1 + i; -1 + i; -1 - i; 1 - i$ .

б) Пусть  $z = x + iy$ . Тогда уравнение имеет вид  $\sqrt{x^2 + y^2} + ix - y = 3 - 5i$ .

Приравниваем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sqrt{25 + y^2} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ 25 + y^2 = y^2 + 6y + 9, \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = \frac{8}{3}, \end{cases}$$

т. е.  $z = -5 + \frac{8}{3}i$ . **Ответ:**  $-5 + \frac{8}{3}i$ .

Выше сформулированные теоремы полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени  $a_1 z + a_0 = 0$  определяется формулой  $z = -\frac{a_0}{a_1}$ , корни уравнения

второй степени  $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$  всегда могут быть получены с помощью формулы (14), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьей и четвертой степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени *выше четвертой* подобных формул в общем случае просто не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни заданного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) может быть полезна следующая теорема: *целые ненулевые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть  $z = k$  – целый корень уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – целые числа. Тогда  $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$ .

Отсюда получаем, что  $a_0 = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1)$ , то есть  $k$  – делитель числа  $a_0$  (число  $a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1$  при сделанных предположениях является целым).

**Пример 18.** Решите уравнение  $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0$ .

**Решение.** Рассматривая делители свободного члена  $\pm 1, \pm 5$ , убеждаемся в том, что только  $z = 5$  является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на  $z - 5$ :

$$\begin{array}{r} z^3 - 4z^2 - 4z - 5 \Big| z - 5 \\ \underline{z^3 - 5z^2} \phantom{- 4z - 5} \\ z^2 - 4z - 5 \phantom{- 5} \\ \underline{z^2 - 5z} \phantom{- 5} \\ z - 5 \phantom{- 5} \\ \underline{z - 5} \\ 0 \end{array}$$

Таким образом,  $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z - 5)(z^2 + z + 1)$ .

Решая квадратное уравнение  $z^2 + z + 1 = 0$  (см. пример 14), получаем остальные корни. Итак,  $z_1 = 5, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

В заключение рассмотрим ещё два примера на вычисление комплексных корней многочленов и на применение формулы (19).

**Пример 19.** Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, имеющий корни  $z_1 = z_2 = 2, z_3 = 1 + i$ .

**Решение.** Поскольку многочлен  $P(z)$  имеет действительные коэффициенты и комплексный корень  $z_3$ , то число  $z_4 = \overline{z_3} = 1 - i$  так же является его корнем. Тогда наименьшая степень многочлена равна 4 и по формуле (19)

$$\begin{aligned} P_4(z) &= 1(z - z_1)^2 (z - z_3)(z - \overline{z_3}) = (z - 2)^2 (z - (1 + i))(z - (1 - i)) = \\ &= (z^2 - 4z + 4)(z^2 - 2z + 2) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 16z + 8. \end{aligned}$$

**Пример 20.** Найдите все корни уравнения  $z^6 - 2\sqrt{3}z^3 + 4 = 0$  и разложить левую часть уравнения в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.

**Решение.** Пусть  $u = z^3$ , тогда  $u$  есть решение квадратного уравнения  $u^2 - 2\sqrt{3}u + 4 = 0$ . Его корни  $u_{1,2} = \sqrt{3} \pm i$ . Для нахождения  $z$  надо решить 2 уравнения в комплексных числах:  $z^3 = u_{1,2}$ . Каждое из них имеет 3 корня. Находим эти корни по формуле (12):

$$z^3 = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z^3 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right); \text{ откуда } \varphi_1 = \arg u_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\varphi_2 = \arg u_2 = \arg(\sqrt{3} - i) = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение  $z^3 = \sqrt{3} + i$  имеет 3 комплексных корня

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), k = 0; 1; 2.$$

$$z^3 = \sqrt{3} - i \Leftrightarrow z^3 = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_n = \sqrt[3]{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \right) \right), n = 0; 1; 2.$$

Значит данное уравнение имеет следующие 6 корней:

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right), \quad z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18} \right),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18} \right), \quad z_4 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{18} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{18} \right) \right),$$

$$z_5 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right), \quad z_6 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18} \right).$$

Далее наше уравнение не имеет действительных корней, значит в его разложении (19) в произведение будут только многочлены второй степени с действительными коэффициентами вида  $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$ . Среди корней  $z_1, \dots, z_6$  комплексно сопряжёнными являются:  $z_1$  и  $z_4$  ( $\arg z_1 = -\arg z_4$ ),  $z_2$  и  $z_6$  ( $\arg z_2 + \arg z_6 = 2\pi$ ),  $z_3$  и  $z_5$ .

Поскольку  $z_1 + z_4 = 2\sqrt[3]{2} \cos \frac{\pi}{18}$ ,  $z_1 \cdot z_4 = \sqrt[3]{4} \left( \cos^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{\pi}{18} \right) = \sqrt[3]{4}$ , то по

теореме Виета  $(z - z_1)(z - z_4) = z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)z + \sqrt[3]{4}$ . Аналогично

$$(z - z_2)(z - z_6) = z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)z + \sqrt[3]{4},$$

$$(z - z_3)(z - z_5) = z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{25\pi}{18}\right)z + \sqrt[3]{4}.$$

Тогда  $z^6 - 2\sqrt[3]{3}z^3 + 4 = \left(z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)z + \sqrt[3]{4}\right) \cdot$

$$\cdot \left(z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)z + \sqrt[3]{4}\right) \left(z^2 - 2\sqrt[3]{2} \cos\left(\frac{25\pi}{18}\right)z + \sqrt[3]{4}\right).$$

**Пример 21.** Число  $z=1$  является корнем уравнения  $z^3 + az^2 + (9-6i)z - 5 + 5i = 0$ . Найдите  $a$  и решите уравнение.

**Решение.** Подставляя  $z=1$  в уравнение, получаем  $1 + a + 9 - 6i - 5 + 5i = 0$ , откуда  $a = -5 + i$ . Так как  $z=1$  — корень, то левая часть уравнения делится на  $(z-1)$ . Подставляем  $a = -5 + i$  и делим левую часть уравнения на  $(z-1)$ :

$$\begin{array}{r} z^3 + z^2(-5+i) + z(9-6i) - 5 + 5i \quad | \quad z-1 \\ \hline z^3 - z^2 \\ \hline z^2(-4+i) + z(9-6i) \\ \hline z^2(-4+i) + z(4-i) \\ \hline (5-5i)z - 5 + 5i \\ \hline (5-5i)z - 5 + 5i \\ \hline 0 \end{array}$$

Значит,  $z^3 + z^2(-5+i) + z(9-6i) - 5 + 5i = (z-1)(z^2 + (-4+i)z + 5-5i)$ .

Далее решаем квадратное уравнение  $z^2 + (-4+i)z + 5-5i = 0$ .

$D = (-4+i)^2 - 4(5-5i) = 15 - 8i - 20 + 20i = -5 + 12i$ . Для вычисления значений  $\sqrt{D} = \sqrt{-5+12i}$  в алгебраической форме используем формулы (15а), (15б). Для  $x = \operatorname{Re}(\sqrt{D})$ ,  $y = \operatorname{Im}(\sqrt{D})$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \text{ решая которую, находим } x_1 = 2, y_1 = 3 \text{ и } x_2 = -2, y_2 = -3.$$

Значит,  $\sqrt{D} = \pm(2+3i)$  и  $z_1 = \frac{4-i+(2+3i)}{2} = 3+i$ ,

$$z_2 = \frac{4 - i - (2 + 3i)}{2} = 1 - 2i.$$

**Ответ.**  $a = -5 + i$ . Корни уравнения:  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ ,  $z_3 = 1$ .

### Контрольные вопросы

**1(4).** Выполните вычисления (ответ запишите в алгебраической форме):

**а)**  $(2i + 5) - 6(3i - 2)$ ; **б)**  $(4 + i)(2i - 1)$ ; **в)**  $i^7 + i^6 + i^5 + i^4$ ; **г)**  $\frac{8 + i}{4 - 6i}$ .

**2(4).** Запишите следующие комплексные числа в тригонометрической форме: **а)**  $z = 5$ ; **б)**  $z = -4$ ; **в)**  $z = 3i$ ; **г)**  $z = 6 - 2i\sqrt{3}$ .

**3(5).** Известно, что  $\varphi = \arg z$ ,  $\rho = |z|$ . Найдите модуль и один из аргументов для каждого из следующих комплексных чисел:

**а)**  $-z$ ; **б)**  $\bar{z}$ ; **в)**  $\frac{4i}{z^3}$ ; **г)**  $z + \bar{z}$ .

**4(4).** Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

**а)**  $|z - i| = 5$ ; **б)**  $|z - 5| = i$ ; **в)**  $|3 + i - z| = |z + 5i + 1|$ ; **г)**  $\cos(\arg z) = \frac{1}{2}$ .

**5(6).** Вычислите, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

**а)**  $\frac{(i - \sqrt{3})^{2016}}{4^{1008}}$ ; **б)**  $\sqrt[6]{-64}$ ; **в)**  $\sqrt[4]{8i\sqrt{3} - 8}$ .

**6(3).** Решите квадратные уравнения:

**а)**  $2z^2 - 7z + 7 = 0$ ; **б)**  $2iz^2 + (2 + 5i)z + (13 + i) = 0$ .

**7(3).** Делится ли многочлен  $z^5 + 3iz^4 - 2z^3 - 2z^2 - 6iz + 4$  на многочлен **а)**  $z + 2i$ ; **б)**  $z - i$ ? Если нет, то найдите остаток от деления.

**8(4).** Определите квадратности корней  $z_1 = -2i$  и  $z_2 = i$  для многочлена  $z^6 - 2iz^5 + 4z^4 - 10iz^3 - z^2 - 8iz - 4$ .

### Задачи

**1(5).** Представьте число  $z$  в тригонометрической форме, если

**а)**  $z = \sin \frac{13\pi}{5} + i \cos \frac{2\pi}{5}$ ; **б)**  $z = 1 + \sin 4\alpha + i \cos 4\alpha$ ,  $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ .

**2(12).** Решите уравнения: **а)**  $(\bar{z})^2 = 3z^3$ ; **б)**  $z^2 - z|z| + |z|^2 = 0$ ;

**в)**  $(iz - 1)^4 = (z + 3)^4$ ; **г)**  $4\bar{z}^2 - 4z|z| + 3 = 0$ .

**3(6).** Изобразите на комплексной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{а) } \frac{z+4i}{1-3i} = \frac{\bar{z}-4i}{1+3i}; \quad \text{б) } \frac{\pi}{6} \leq \arg(6iz-12i-18) \leq \frac{2\pi}{3}; \quad \text{в) } \left| \frac{z-i}{z+2} \right| = 3.$$

**4(3).** Найдите  $z^n + \frac{1}{z^n}$ , если  $z + \frac{1}{z} = -1, n \in \mathbb{N}$ .

**5(4).** Среди чисел  $z$ , принадлежащих множеству  $D$ , найдите число с наименьшим модулем; если множество  $D$  задано следующим неравенством **а)**  $|z+5i| \leq |z-1+i|$ ; **б)**  $|z+3i-4| \geq 7$ .

**6(2).** Решите уравнение  $z^4 + z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$ , если известно, что число  $z_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$  является его корнем.

**7\*(5).** Вычислите сумму

$$S = \cos \varphi + a \cos 2\varphi + a^2 \cos 3\varphi + \dots + a^{n-1} \cos n\varphi.$$

**8(4).** Сумма квадратов корней уравнения  $z^3 - 6z^2 + \alpha z + 40 = 0$  равна 28. Найдите  $\alpha$  и решите это уравнение.

**9(2).** Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа  $z_1 = 2-i$ ,  $z_2 = 3-i$  и  $z_3 = -2$ .

**10(4)** Представьте следующие многочлены в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

$$\text{а) } P(z) = 324z^4 + 1; \quad \text{б) } Q(z) = 2z^4 + 7z^3 - 27z^2 + 16z - 12.$$

**11(4).** Пусть  $D_1$  – множество точек  $z_1$  комплексной плоскости таких, что:  $|\operatorname{Re}z| + |\operatorname{Im}z - 8| \leq 2$ ;  $D_2$  – множество точек  $z_2$  комплексной плоскости таких, что  $z_2 = \frac{3}{2}iz_1$ .

**а)** Изобразите на комплексной плоскости множества  $D_1$  и  $D_2$ .

**б)** Найдите расстояние между множествами  $D_1$  и  $D_2$  (т. е. наименьшее расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$ , такими, что  $z_1 \in D_1, z_2 \in D_2$ ).

**12\*(4).** Найдите остаток от деления многочлена  $3z^{2017} - 2z^{503} + 4z^{302} + 8$  на многочлен  $z^2 - z + 1$ .