Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Комплексные числа

Задание для 10-х классов

(2019 – 2020 учебный год)
(факультативное задание)

г. Долгопрудный, 2020

Составитель: С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание для 10-х классов (2019 – 2020 учебный год), 2020, 32 с.

Дата отправления задания – 20 апреля 2020 г.

Внимание! Данное задание является факультативным, т. е. присылать его в ЗФТШ на проверку не обязательно, но мы настоятельно рекомендуем Вам внимательно проработать его. По желанию можете прислать тетрадь с решёнными задачами на проверку.

Составитель:
Городецкий Сергей Евгеньевич

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение.**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2, ... n, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными на множестве натуральных чисел. Поэтому вводятся множества целых и рациональных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел. Здесь, например, при извлечении корня из положительного числа вводятся иррациональные числа. Однако, решение алгебраических уравнений второй степени и выше привело к необходимости извлекать корень из любого действительного числа: так появились комплексные числа.

§1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. ***Алгебраическая форма комплексного числа***. Для того, чтобы извлекать квадратный корень из отрицательного действительного числа, множество действительных чисел было расширено: к нему добавили новое число i, такое что $i^2=-1$. Операции умножения этого числа на любое действительное число и сложения его с действительным числом привели к понятию комплексного числа. Комплексными числами называют выражения вида $a+bi$, в которых a и b – любые действительные числа, и для которых следующим образом вводится понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$; (пишут $a+bi=c+di$)

б) *суммой* чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число

$$a+c+(b+d)i;$$

в) *произведением* чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число

$$ac-bd+(ad+bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i, \tag{1}$$

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i. \tag{2}$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z=a+bi$ означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z, при этом действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $z=a+bi$ и обозначается $\operatorname{Re} z$; пишут $\operatorname{Re} z=a$ или $\operatorname{Re}\left(a+bi\right)=a$. Число b называется *мнимой частью* числа $z=a+bi$ и обозначается $\operatorname{Im} z$; пишут $\operatorname{Im} z=b$ или $\operatorname{Im}\left(a+bi\right)=b$. *Символ* i называется *мнимой единицей.*

Заметим, что операции сложения и умножения над числами вида $a+0i$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a+0i)+(c+0i)=a+c+0i,$$
$$(a+0i)(c+0i)=ac+0i.$$

Таким образом, отождествив число $a+0i$ с действительным числом a, получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел и $a=a+0i$. В частности, число $0=0+0i$ будем, как обычно, называть нулём, а число $1=1+0i$ – единицей.

Числа вида $0+bi$ называют *чисто мнимыми* и обозначаются bi:

$$0+5i=5i,\ \ 0-2i=-2i.$$

На основании формулы (2) найдём значение выражения $i^2=i\cdot i$:

$$i^2=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

Т. е.,

$$i^2=-1. \tag{3}$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т. к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a+bi$ и $c+di$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на –1.

Пример 1. Найдите сумму и произведение комплексных чисел $z_1=8+3i$ и $z_2=-5+2i$. По формуле (1) находим

$$z_1+z_2=8-5+i(3+2)=3+5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8+3i)$ и $(-5+2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1z_2=(8+3i)(-5+2i)=-40-15i+16i+6i^2=-40+i-6=-46+i.$$

2. *Свойства операций над комплексными числами.* Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*: $z_1+z_2=z_2+z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2.

2. *Ассоциативность сложения*: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

3. $z+0=z$ для любого комплексного числа z.

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2-z_1.

5. *Коммутативность умножения*: $z_1z_2=z_2z_1$ для любых z_1, z_2.

6. *Ассоциативность умножения*: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ для любых z_1, z_2, z_3.

7. *Дистрибутивный закон*: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ для z_1, z_2, z_3.

8. $1\cdot z=z$ для любого комплексного числа z.

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, существует число z, такое, что $z_2 z = z_1$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения. Докажем свойства 4 и 9; остальные докажите самостоятельно.

Свойство 4. Пусть $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di,\ z = x + yi$. Тогда равенство $z_1 + z = z_2$ запишется в виде $c + di = (a + bi) + (x + yi) = a + x + (b + y)i$. Отсюда следует, что x и y удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} a + x = c \\ b + y = d \end{cases}$, откуда $x = c - a,\ y = d - b$ и

$$z_2 - z_1 = (c - a) + (d - b)i \tag{4a}$$

Свойство 9. Пусть опять $z_1 = a + bi,\ z = x + yi,\ z_2 = c + di,$ и хотя бы одно из чисел c и d отлично от нуля. Тогда равенство $zz_2 = z_1$ запишется так: $a + bi = (x + yi)(c + di) = xc - yd + (xd + yc)i.$ Отсюда x и y удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \tag{4б}$$

Пример 2. Найдите разность $z_1 - z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = -1 + 3i \text{ и } z_2 = 5 - 2i.$$

По формуле (4а) находим разность

$$z_1 - z_2 = (-1 + 3i) - (5 - 2i) = -1 - 5 + (3 - (-2))i = -6 + 5i.$$

По формуле (4б) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 \cdot 5 + 3(-2)}{5^2 + (-2)^2} + i\frac{3 \cdot 5 - (-1)(-2)}{5^2 + 2^2} = \frac{-11}{29} + \frac{13}{29}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4б).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла. Невозможно перенести понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, так, чтобы при этом сохранились все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, сохранение знака неравенства при умножении обеих его частей на положительное число и т. п.). Покажем, например, что числа i и 0 сравнить невозможно.

Предположим, что $i > 0$. Тогда умножая обе части неравенства на i (по предположению $i > 0$, поэтому знак неравенства не меняем), получаем $i^2 > 0$, т. е. $-1 > 0$, что неверно. Предположим, что $i < 0$. Тогда, умножая обе части неравенства на $i < 0$, снова получим, что $i^2 > 0$.

Таким образом, сравнить числа i и 0 невозможно.

Пример 3. Найдите сумму, разность и произведение комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = a - bi$. Находим по формулам (1) и (4а):

$$z_1 + z_2 = a + bi + (a - bi) = 2a, \; z_1 - z_2 = 2bi.$$

Находим по формуле (2) или формально перемножая двучлены:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Пусть $z = a + bi$. Тогда число $a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* числу $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$. $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$. Пример 3 показывает, что сумма двух комплексно сопряжённых чисел $z + \overline{z}$ является всегда числом действительным, а их разность является чисто мнимым числом; произведение $z\overline{z}$ также всегда число действительное и более того, неотрицательное. Ясно также что число, сопряжённое числу $\overline{z}$ равно z: $\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$; если $z -$ действительное число $z = a$, то $\overline{z} = a = z$. Кроме того, справедливы следующие утверждения о комплексно сопряжённых числах:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \tag{5а}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2 \tag{5б}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 \tag{5в}$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \text{ если } z_2 \neq 0 \tag{5г}$$

Докажем, например (5в). Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i.$$

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i = ac - bd - (ad + bc)i.$$

Из (5в) при $z = z_1 = z_2$ следует: $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$ и аналогично для любой натуральной степени $n : \overline{z^n} = (\overline{z})^n$. (5д)

§2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. ***Комплексная плоскость.*** Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждое комплексное число $z=a+ib$ задаётся парой действительных чисел $(a;b)$. Эта же пара чисел может рассматриваться в качестве координат точки M (a,b) на координатной плоскости. Поэтому каждому комплексному числу $z=a+ib$ поставим в соответствие точку M (a,b) координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна $\mathrm{Re}z=a$, а ордината равна $\mathrm{Im}z=b$. Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z=a+bi$.

Так построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т. к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a+i0$, т. е. действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам $0+bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a+bi$ как вектора $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a,b)$ (см. рис. 1). Так каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ концом в точке $M(a,b)$ соответствует комплексное число $a+bi$ и наоборот. При этом нулевому вектору соответствует комплексное число $0+0i$.

2. ***Модуль комплексного числа.***

Определение. *Модулем* комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой r. Применяя теорему Пифагора, получим, что

$$|OM|=|z|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{(см. рис. 1).}$$

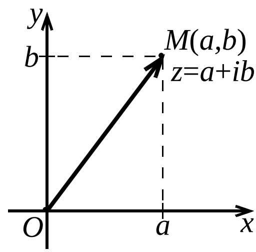


Рис. 1

Если $z=a+0i$, то $|z|=\sqrt{a^2+0}=|a|$, т. е. для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z|>0$ для всех $z\neq 0$; $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0+0i=0$.

Перечислим основные свойства модуля комплексного числа:

$$|\overline{z}| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}. \text{ (см. рис. 2).} \qquad (6.1)$$

$$z\cdot\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \text{ (из примера 3)} \qquad (6.2)$$

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \qquad (6.3)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ если } z_2\neq 0 \qquad (6.4)$$

Докажем, например, (6.3). Пусть $z_1 = a+bi,\quad z_2 = c+di$. Тогда $z_1z_2 = ac-bd+(ad+bc)i,$

$$|z_1z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} =$$

$$= \sqrt{(ac)^2+(bd)^2-2acbd+(ad)^2+(bc)^2+2adbc} =$$

$$= \sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)+d^2\left(a^2+b^2\right)} = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} = |z_1|\cdot|z_2|.$$

Используя свойства модуля, можно получить более простую формулу для деления комплексных чисел, чем (4б). Число $\frac{1}{z}$ запишем в виде:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \text{ при } z_2\neq 0. \qquad (7)$$

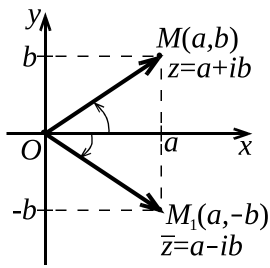


Рис. 2

Формула (7) сводит операцию деления комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и $\overline{z}_2$ и делению этого произведения на действительное число $|z_2|^2$.

Пример 4. Найдите частное $\frac{2-3i}{-1+5i}$.

По формуле (7) имеем:

$$\frac{2-3i}{-1+5i} = \frac{(2-3i)(-1-5i)}{|-1+5i|^2} = \frac{-2+15i^2+3i-10i}{1^2+5^2} = -\frac{17}{26}-\frac{7}{26}i.$$

3. ***Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.*** Изображение комплексных чисел с помощью векторов удобно тем, что при этом операции сложения и вычитания чисел получают простое геометрическое толкование. Так, при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части: $z = z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i.$ Так же выполняется и операция сложения векторов $\overrightarrow{OM_1}(a,b)$ и $\overrightarrow{OM_2}(c,d)$: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (a + c, b + d)$. Иначе: если числу z_1 соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу z_2 – вектор $\overrightarrow{OM_2}$, то числу $z_1 + z_2$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (см. рис. 3). Это же относится и к разности комплексных чисел z_1 и z_2: $z = z_1 - z_2 = a - c + (b - d)$ и $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (a - c, b - d)$, т. е. числу $z_1 - z_2$ соответствует вектор $\overline{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$. При этом число $|z_1 - z_2|$ есть, по определению модуля, длина вектора $z_1 - z_2$. (На рис. 3 $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_2M_1}$). Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам*. Теперь, используя геометрический смысл операций с комплексными числами, решим следующие задачи.

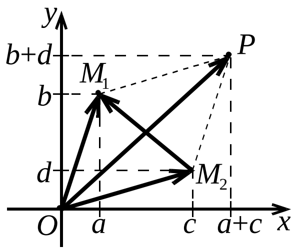


Рис. 3

Пример 5. Найдите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: а) $|z - i| = 1$;

б) $1 < |z + 3 + i| < 3$; в) $|z - 2 + i| \geq |z + 3 - 4i|$;

г) $|z^2| - 6z - \overline{6z} = 0$; д) $|z - 1| = 2|z + 2|$.

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

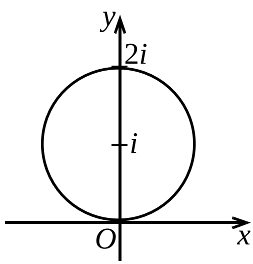


Рис. 4

б) Здесь $|z+3+i| = |z-(-3-i)|$. Условию $1<|z+3+i|<3$ удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки (–3, – i) на расстояние, большее 1, но меньшее 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке (–3, – 1) и радиусами $R_1 = 1,\ \ R_2 = 3$ (рис. 5). Искомое множество заштриховано.

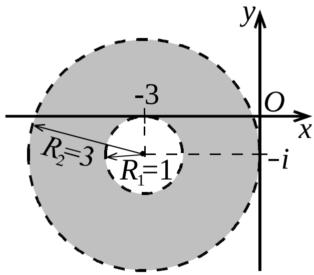


Рис. 5

в) Рассмотрим сначала равенство $|z-2+i| = |z+3-4i|$. Перепишем его в виде $|z-(2-i)| = |z-(-3+4i)|$, т. е. расстояние от точки z до точки $z_1 = 2-i$ равно расстоянию от точки z до точки $z_2 = -3+4i$. Из геометрии известно, что это серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $M_1(2;-1)$ и $M_2(-3;4)$. На рис. 6 это прямая l. Тогда точки, удовлетворяющие неравенству $|z-2+i| \geq |z+3-4i|$, лежат на плоскости ближе к точке M_2, чем к точке M_1, т. е. на прямой l или выше неё.

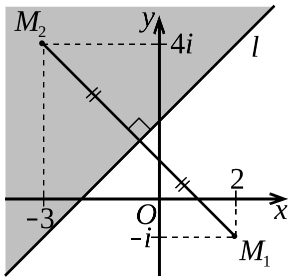


Рис. 6

г) Пусть $z = x+iy$. Тогда равенство $|z|^2 - 6z - 6\bar{z} = 0$ примет вид $x^2+y^2-6(x+iy)-6(x-iy)=0$. Отсюда $x^2+y^2-12x=0,$ или $(x-6)^2+y^2=36$. Это уравнение окружности с центром в точке $M(6;\,0)$ и радиусом $R=6$ (см. рис. 7).

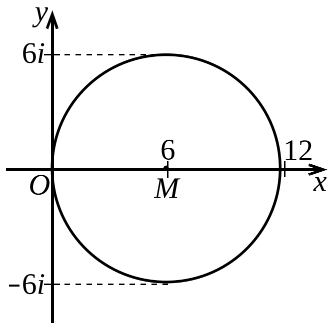


Рис. 7

д) Пусть $z = x+iy$. Тогда

$$|x-1+iy| = 2|x+2+iy| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 4\left(x^2+4x+4+y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+18x+3y^2+15=0 \Leftrightarrow x^2+6x+y^2+5=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=4.$$

Это окружность с центром в точке $M(-3;0)$ и радиусом 2 (см. рис. 8). Т. е. точки лежат на окружности радиуса 2 с центром в точке $z=-3$.

4. ***Аргументы комплексного числа.*** Аргументом комплексного числа $z=a+bi$ $(z\neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $z=\overrightarrow{OM}(a,b)$; величина угла считается положительной, если отсчёт угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчёт производится по часовой стрелке. *Для числа $z=0$ аргумент не определён.*

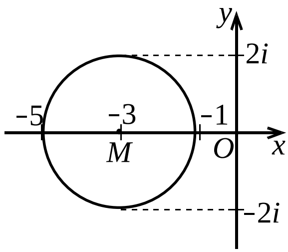


Рис. 8

Для обозначения того, что число φ является аргументом числа $z=a+bi$, пишут $\varphi=\arg z$ или $\varphi=\arg(a+bi)$. (См. рис. 9).

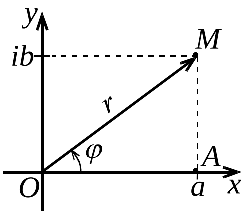


Рис. 9

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число $z=a+bi$ определяется однозначно. Пусть $\left|\overrightarrow{OM}\right|=r$; тогда $a=\operatorname{Re}z=r\cos\varphi$ и $b=\operatorname{Im}z=r\sin\varphi$.

С другой стороны, если задано комплексное число, то модуль этого числа всегда определён однозначно, в отличие от аргумента, который определяется неоднозначно: если $\varphi-$ некоторый аргумент числа z, то углы $\varphi+2\pi k,\ k\in Z$ являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(1-i)$ являются углы $-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{15\pi}{4}$ и т. д. (см. рис. 10).

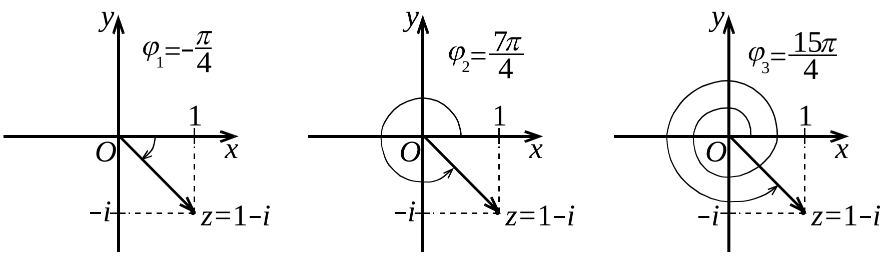


Рис. 10

Таким образом, для каждого числа $z\neq 0$ имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Если комплексное число z задано в алгебраической форме: $z=a+bi$ и $\varphi=\arg z$, то справедливы равенства (см. рис. 9):

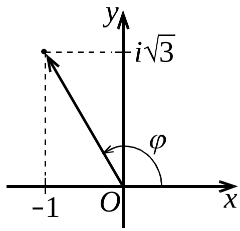
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases} \qquad (8)$$

Из (8) также следует: если $\varphi = \arg(a+bi)$, $a \neq 0$, то $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + bi$ удобно использовать *геометрическую интерпретацию* комплексного числа z для определения той четверти, где находится точка $z = a + bi$, а затем воспользоваться одним из уравнений (8). Заметим, что аргументы чисел z и $\overline{z}$, $z \neq 0$, связаны соотношением $\arg\overline{z} = -\arg z$ (см. рис. 2).

Пример 6. Найдите аргументы числа

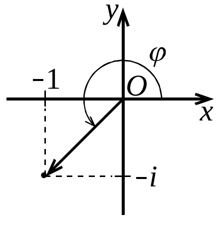
а) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$; б) $z_2 = -1 - i$.



а) Так как $\operatorname{Re} z_1 = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0$, то точка $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ лежит во II четверти. Поэтому надо найти решение одного из уравнений (8), которое является углом II четверти. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}} = -\frac{1}{2},\ \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}.$$

б) Здесь $\operatorname{Re} z_2 = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z_2 = -1 < 0$, т. е. точка $z_2 = -1 - i$ лежит в III четверти (см. рис.). Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ или $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1}{-1} = 1$, которое является углом III четверти. Получаем $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.



Заметим, что если $a = 0$, (тогда $z = bi$), то либо $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ (если $b < 0$).

§3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. ***Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.*** Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другую форму записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z = a + bi$, то есть $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg(a + bi)$. Тогда из формулы (8) следует, что $a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,$ и,

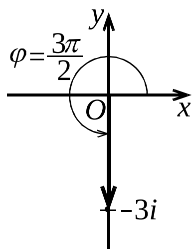
$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

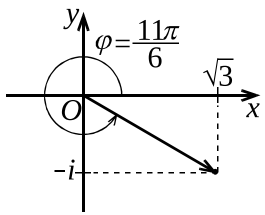
Пример 7. Запишите число в тригонометрической форме: а) $z_1 = -3i$; б) $z_2 = \sqrt{3} - i$.



а) Отметим число $z_1 = -3i$ на комплексной плоскости (см. рис.). Этому числу соответствует точка $M(0;-3)$. $|z_1| = |OM| = 3$. В качестве аргумента z_1 можно выбрать $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. (Угол поворота изображён на рисунке). Значит, $-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Находим модуль

$$r = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2.$$



Находим один из аргументов; так как $\operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3} > 0$, $\operatorname{Im} z_2 = -1 < 0$, то число $\sqrt{3} - i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, которое является углом в IV четверти – например, это $\varphi = \frac{11\pi}{6}$. Тогда

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Пример 8. Запишите число в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 2(\cos 40° + i\sin 40°)i$; б) $z = 1 + \cos 2\alpha - i\sin 2\alpha, \left(\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. а) $z_1 = 2(-\sin 40° + i\cos 40°)$, но эта форма не является тригонометрической формой числа z_1. Имеем $|z_1| = \sqrt{4(\sin^2 40° + \cos^2 40°)} = 2$. Согласно определению $\arg z$ нам надо найти такой угол φ, для которого $\begin{cases} \cos\varphi = -\sin 40° < 0 \\ \sin\varphi = \cos 40° > 0 \end{cases}$. Тогда φ лежит во II четверти и из тригонометрических формул приведения имеем $\varphi = 90° + 40° = 130°$. Отсюда тригонометрическая форма числа z_1 следующая: $z_1 = 2(\cos 130° + i\sin 130°)$.

б) Здесь $|z|^2 = (1 + \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = = 2 + 2\cos 2\alpha = 4\cos^2 \alpha$; отсюда $|z_2| = -2\cos\alpha$ (т. к. $\alpha -$ угол III четверти). $\operatorname{tg}(\arg z_2) = -\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = -\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, откуда $\arg z_2 = -\alpha + \pi k$. Так как $\mathrm{Re} z = 1 + \cos 2\alpha > 0$, $\mathrm{Im} z = -\sin 2\alpha < 0$, то число z лежит в IV четверти, и в качестве аргумента можно выбрать $\arg z_2 = \pi - \alpha$.

Тогда тригонометрическая форма числа z_2 :

$$z_2 = -2\cos\alpha \cdot (\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)).$$

2. ***Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.***

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cdot(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) =$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (9)$$

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения есть сумма аргументов сомножителей.*

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (10)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного является разностью аргументов делимого и делителя.*

3. ***Возведение в степень и извлечение корня***

Формула (9) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай *n* сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\varphi_n$ – аргументы чисел $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n$ соответственно, то $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\dots+\varphi_n=\arg(z_1z_2...z_n)$,

$$|z_1|\,|z_2|...|z_n|=|z_1z_2...z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (11)$$

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени*.

Формулу (11) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найдите z^9, если $z=-1+\sqrt{3}i.$

Так как $\left|-1+\sqrt{3}i\right|=2$, а одним из аргументов является $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ (см. пример 6 на стр. 12), то

$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Применяя формулу (11), получаем

$$z^9=2^9\left(\sin\frac{18\pi}{3}+i\sin\frac{18\pi}{3}\right)=2^9\left(\cos6\pi+i\sin6\pi\right)=2^9\left(1+0i\right)=512.$$

Формулы операций над комплексными числами в тригонометрической форме позволяют дать геометрическую интерпретацию умножения или деления на комплексное число. Пусть число *z* записано в тригонометрической форме: $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ и ему отвечает на комплексной плоскости вектор $\overrightarrow{OM}\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)$. Тогда при умножении этого числа *z*, например, на число $2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, получим число $z_1=2iz$, которому соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$. При этом $\left|\overrightarrow{OM_1}\right|=|2i|\left|\overrightarrow{OM}\right|=2r$, а $\arg z_1=\arg z+\arg\left(2i\right)=\arg z+\dfrac{\pi}{2}.$ Таким образом, вектор $\overrightarrow{OM_1}$ получается из вектора $\overrightarrow{OM}$ с помощью двух преобразований: поворота на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и увеличения длины в 2 раза. Формулы (9) – (11) также часто

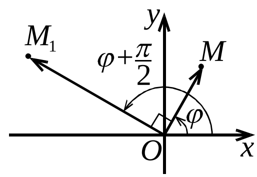


Рис. 11

упрощают операции умножения и деления комплексных чисел. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10. Выполните арифметические операции:

$$\frac{\left(2\sin 27^\circ - 2i\cos 153^\circ\right)^3 i^{103}}{-\cos 39^\circ - i\sin 39^\circ}.$$

Решение. Пусть $z = \dfrac{z_1^3}{z_2} i^{103}$, где $z_1 = 2\left(\sin 27^\circ - i\cos 153^\circ\right)$, $z_2 = -\left(\cos 39^\circ + i\sin 39^\circ\right)$. Число z_1 представим в тригонометрической форме. $|z_1| = \sqrt{4\sin^2 27^\circ + 4\left(-\cos 153^\circ\right)^2} = 2\sqrt{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ} = 2.$ $\operatorname{Re} z_1 = 2\sin 27^\circ > 0, \operatorname{Im} z_1 = -2\cos 153^\circ > 0,$ т. е. $\varphi_1 = \arg z_1$ – угол I четверти. По формулам (8) имеем:

$$\cos\varphi_1 = \frac{2\sin 27^\circ}{2} = \sin 27^\circ,\ \sin\varphi_1 = \frac{-2\cos 153^\circ}{2} = -\cos 153^\circ = \cos 27^\circ.$$

Тогда по тригонометрическим формулам приведения $\varphi_1 = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$ и $z_1 = 2\left(\cos 63^\circ + i\sin 63^\circ\right)$. Значит, $z_1^3 = 2^3\left(\cos 189^\circ + i\sin 189^\circ\right)$. Далее $|z_2| = \sqrt{\left(-\cos 39^\circ\right)^2 + \left(-\sin 39^\circ\right)^2} = 1.$ $\operatorname{Re} z_2 = -\cos 39^\circ < 0.$ $\operatorname{Im} z_2 = -\sin 39^\circ < 0$. Тогда $\varphi_2 = \arg z_2$ – угол в III четверти и из формул (8): $\cos\varphi_2 = -\cos 39^\circ,\ \sin\varphi_2 = -\sin 39^\circ,$ отсюда

$$\varphi_2 = 180^\circ + 39^\circ = 219^\circ,\ z_2 = \cos 219^\circ + i\sin 219^\circ.$$

$$i^{103} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{103} = \cos\frac{103\pi}{2} + i\sin\frac{103\pi}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

В итоге получаем:

$$z = \frac{8\left(\cos 189^\circ + i\sin 189^\circ\right)(-i)}{\cos 219^\circ + i\sin 219^\circ} = -8i\Big(\cos\left(189^\circ - 219^\circ\right) + i\sin\left(189^\circ - 219^\circ\right)\Big) =$$

$$= -8i\Big(\cos\left(-30^\circ\right) + i\sin\left(-30^\circ\right)\Big) = -8i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i.$$

Пример 11. Вычислите сумму $S = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots \cos n\varphi.$

Решение. Если $\cos\varphi = 1,$ то $\varphi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\cos 2\varphi = \cos 3\varphi = \ldots = \cos n\varphi = 1$ и $S = n + 1$. Рассмотрим такое $\varphi,$ что $\cos\varphi \neq 1$. Пусть $U = S + iT,$ где $S = 1 + \cos\varphi + \cdots \cos n\varphi,$ $T = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots \sin n\varphi$. Тогда $S = \operatorname{Re}(U)$. Комплексное число U имеет вид:

$$U = 1 + \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) + \left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right) + \cdots + \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) =$$

$$= (\text{из } 11) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n,\ \text{где } z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Тогда U – это сумма $(n+1)$ членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = z,$ т. е.

$$U = \frac{1\cdot\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{\cos\left((n+1)\varphi\right)-1+i\sin\left((n+1)\varphi\right)}{\cos\varphi-1+i\sin\varphi}.$$

Тогда

$$S = \operatorname{Re}U = \operatorname{Re}\left(\frac{\left(\cos(n+1)\varphi\right)-1+i\sin\left((n+1)\varphi\right)\left(\cos\varphi-1-i\sin\varphi\right)}{\left(\cos\varphi-1\right)^2+\sin^2\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\cos\left((n+1)\varphi\right)\cos\varphi-\cos\left((n+1)\varphi\right)-\cos\varphi+1+\sin\left((n+1)\varphi\right)\sin\varphi}{2-2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{\cos n\varphi-\cos\left((n+1)\varphi\right)-\cos\varphi+1}{2-2\cos\varphi}.$$

Пример 12. Дано число $U = \left(\sin\frac{\pi}{20}+i\cos\frac{\pi}{20}\right)^5.$

а) Запишите число U в тригонометрической и алгебраической форме.

б) Изобразите на комплексной плоскости множество D комплексных чисел z, таких что $\left|U\left(z+\sqrt{2}U\right)\right| < 1.$

в) Изобразите на комплексной плоскости множество D_1 комплексных чисел z_1 вида $\left\{z_1 = z(1-i),\ z\in D\right\}.$

г) Найдите наибольшее и наименьшее значение $|z|$ для всех чисел z, таких что $\left|U\left(z+\sqrt{2}U\right)\right| = 1.$

Решение. а) Число $U = z_0^5,$ где $z_0 = \sin\frac{\pi}{20}+i\cos\frac{\pi}{20}$. Запишем z_0 в тригонометрической форме.

$|z_0| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{20}+\cos^2\frac{\pi}{20}} = 1.$ $\operatorname{Re}z_0 = \sin\frac{\pi}{20} > 0,$ $\operatorname{Im}z_0 = \cos\frac{\pi}{20} > 0,$ т. е. $\varphi = \arg z_0$ – угол I четверти и по формулам (8) $\cos\varphi = \sin\frac{\pi}{20},$ $\sin\varphi = \cos\frac{\pi}{20};$ тогда $\varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20},$ $z_0 = \cos\frac{9\pi}{20}+i\sin\frac{9\pi}{20}$. Теперь ответ а) $U = z_0^5 = \cos\left(\dfrac{45\pi}{20}\right) + i\sin\left(\dfrac{45\pi}{20}\right) = \cos\dfrac{9\pi}{4} + i\sin\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}.$

б) По свойству модуля имеем: $\left|U\left(z+\sqrt{2}U\right)\right| = |U|\left|z+\sqrt{2}U\right| = \left|z+\sqrt{2}U\right|,$ т. к. $|U|=1.$ Тогда множество D задаётся условием, $\left|z+\sqrt{2}U\right|<1,$ т. е. как и в примере 4 выше $D-$это множество точек z на комплексной плоскости, расстояние от которых до точки $M=-\sqrt{2}U=-1-i$ меньше 1. Это множество: круг с центром в точке $M(-1;-1)$ и радиусом $r=1$. На рис. 12а множество закрашено.

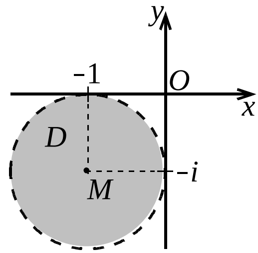


Рис. 12а

в) $|1-i| = \sqrt{2}, \arg(1-i) = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k.$

Тогда согласно указанному выше геометрическому смыслу умножения на комплексное число $1-i$: модуль всех чисел $z \in D$ увеличивается в $\sqrt{2}$ раз. Аргументы всех этих чисел изменяются на $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Поскольку $-\sqrt{2}U(1-i) = -(1+i)(1-i) = -2,$ то образом точки $M-$центра круга D будет точка $M_1(-2,0)$. Тогда D_1-это внутренняя часть круга с центром в точке M_1 и радиуса $r_1 = r\sqrt{2} = \sqrt{2}$. На рис. 12б множество заштриховано.

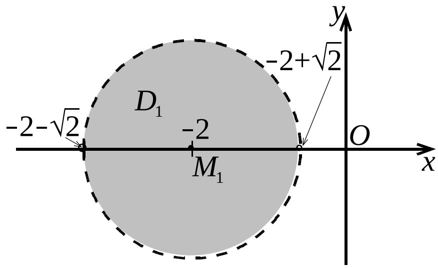


Рис. 12б

г) Согласно п. б) множество $D_2 : \left|U\left(z+\sqrt{2}U\right)\right| = 1$ задаётся условием $\left|z+\sqrt{2}U\right|=1,$ или $\left|z-(-1-i)\right|=1,$ т. е. D_2-это окружность – граница круга D. Из тригонометрической формы записи комплексного числа следует, что все числа z, лежащие на единичной окружности $x^2+y^2=1,$ можно задать в виде $\left\{z=\cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi\in[0;2\pi]\right\}$. Тогда числа z, лежащие на окружности D_2 с центром в точке $-1-i$ запишем в виде:

$$\left\{z=-1-i+\cos\varphi+i\sin\varphi,\ \varphi\in[0;2\pi]\right\} \text{ или } z=-1+\cos\varphi+i(-1+\sin\varphi).$$

В этом случае $|z|^2=(-1+\cos\varphi)^2+(-1+\sin\varphi)^2=$

$$=1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi=3-2(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

По формулам тригонометрии выражение $\cos\varphi+\sin\varphi$ можно представить в виде: $\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда при $\varphi\in[0;2\pi]$ значения $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]$ и $-\sqrt{2}\le\cos\varphi+\sin\varphi\le\sqrt{2}$. Значит наибольшее (наименьшее) значение $|z|$ при $z\in D_2$ равно наибольшему (наименьшему) значению $\sqrt{3-2(\cos\varphi+\sin\varphi)}$ при $\varphi\in[0;2\pi]$. Тогда ответ г) наибольшее значение $|z|$ равно $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1,$ наименьшее значение $|z|$ равно $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$

4. *Извлечение корня из комплексного числа*

Перейдём к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа. Число z называется *корнем степени* $n, n\in N,$ из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n=\omega.$

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени n из числа $\omega,$ нужно решить уравнение $z^n=\omega$. Если $\omega=0,$ то при любом n уравнение $z^n=0$ имеет единственное решение $z=0$. Пусть теперь $\omega\ne0$. Представим z и ω в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \omega=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0).$ Тогда уравнение $z^n=\omega$ примет вид: $\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0).$ Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно, $r^n=r_0,\ n\varphi=\varphi_0+2\pi k, k\in Z,$ или $r=\sqrt[n]{r_0}, \varphi=\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2\pi}{n}k, k\in Z.$ Таким образом, все решения уравнения $z^n=\omega$ даются формулой:

$$z_k=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right), k=0,1,\cdots,(n-1) \qquad (12)$$

В самом деле, придавая числу k в формуле (12) целые значения, отличные от $0,1,\ldots,(n-1),$ не получим других комплексных чисел. Например, при $k=n$ получаем

$$z_n=\sqrt[n]{r_0}\left(\left(\cos\frac{\varphi_0}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n}+2\pi\right)\right)=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n}+i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right)=z_0.$$

Формула (12) называется второй формулой Муавра. Таким образом, если $\omega \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа ω. В частности, если $n=2$, то уравнение $z^2=\omega$ имеет два корня:

$$z_0=\sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}+i\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),\ z_1=\sqrt{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}+\pi\right)\right)=-z_0,$$

т. е. эти корни симметричны относительно начала координат.

Отметим также, что при извлечении квадратного корня из действительного положительного числа x мы получаем два значения $\pm\sqrt{x}$, а при извлечении корня из действительного отрицательного числа $x-$ два значения $\pm i\sqrt{-x}$. При $n>2$ все значения корня из действительного положительного числа x имеют вид:

$$z_k=\sqrt[n]{x}\left(\cos\frac{2\pi}{n}k+i\sin\frac{2\pi}{n}k\right), k=0,1,\ldots,(n-1).$$

Здесь $z_0=\sqrt[n]{x}-$арифметическое значение корня. Если при представлении числа в тригонометрической форме получаются не табличные значения углов, то для извлечения корня удобнее использовать приём, применённый ниже в п.1 §4.

Также из формулы (12) следует, что если $n\geq 3,\ n\in N,$ то точки, изображающие все корни уравнения $z^n=\omega$, являются вершинами правильного $n-$угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z=0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 13. Найдите все значения а) $\sqrt[3]{-8}$, б) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$.

Решение. а) Запишем число $\omega=-8$ в тригонометрической форме: $\omega=8(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$. Применяя формулу (12) получаем:

$$z_k=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right), k=0,1,2.$$

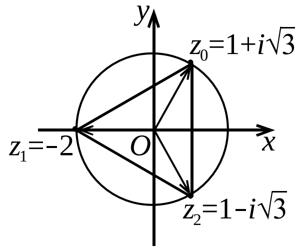


Рис. 13а

Следовательно: $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i,\ z_1=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2,$

$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}i.$ Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2 находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z=0$ (см. рис. 13а).

б) Из примера 9 тригонометрическая форма числа $\omega = -1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Тогда по формуле (12)

$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right),\ k = 0,1,2,3.$ т. е.

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right) = -\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

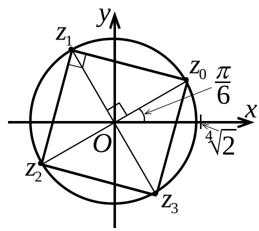


Рис. 13б

Эти точки – вершины квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[4]{2}$ с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 13б).

§4. Алгебраические уравнения

1. ***Квадратные уравнения.*** В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0, \qquad (13)$$

с действительными коэффициентами a, b, c. Там было показано, что если дискриминант уравнения (13) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ \text{где}\ D = b^2 - 4ac \geq 0. \qquad (14)$$

В случае, если $D < 0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (14) использовался приём выделения квадрата из трёхчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right),$$

откуда и получалась формула (14). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются на множестве комплексных чисел.

Таким образом, на множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D = b^2 - 4ac = 0,$ уравнение имеет один корень (2 совпадающих корня или один корень кратности 2); при $D \neq 0$ уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула $z = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня[1].

Пример 14. Решите уравнение $z^2 + z + 1 = 0.$
По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, то $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$

При решении квадратного уравнения с комплексными коэффициентами число D в формуле (14) также будет комплексным. Тогда, чтобы вычислить $\sqrt{D}$ по формуле (12) надо приводить число D к тригонометрической форме. При вычислении квадратного корня может быть более удобным другой способ, не требующий использовать тригонометрическую форму. Покажем как это делать. Пусть число ω имеет вид $\omega = u + iv, v \neq 0$. Тогда числа $\sqrt{\omega}$ – это решения уравнения $z^2 = \omega$. Если z – комплексное число вида $z = x + iy,$ то уравнение $z^2 = \omega$ примет вид $(x + iy)^2 = u + iv$ или $x^2 - y^2 + 2xyi = u + vi$. Отсюда, приравнивая вещественные и мнимые части, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v. \end{cases} \tag{15а}$$

Для решения этой системы можно выразить y из второго уравнения: $y = \dfrac{v}{2x}$ (т. к. $v \neq 0,$ то $x \neq 0$ и $y \neq 0$). Тогда первое уравнение примет вид

$$x^2 - \frac{v^2}{4x^2} = u \text{ или } 4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0. \tag{15б}$$

Это биквадратное уравнение; сделав в нём замену переменной $t = x^2$ (т. к. x – действительное число, то t – действительное число и $t \geq 0$), получим квадратное уравнение для переменной t. Нам нужен только неотрицательный корень этого уравнения $t_1 \geq 0$. Далее $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$,

[1] Если D – действительное положительное число, то $\sqrt{D}$, в отличие от действительных чисел, принимает два значения. Например, $\sqrt{4} = \pm 2.$

$y_{1,2} = \dfrac{v}{2x_{1,2}}$ и $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$ – два значения $\sqrt{\omega}$, полученные в алгебраической форме.

Пример 15. Решите уравнение $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-(2i-3) + \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} = \frac{3 - 2i + \sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $x + iy = \sqrt{-15-8i}$ по формуле (15а) имеем систему $\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$, далее получаем $4x^4 + 60x^2 - 64 = 0$, откуда $x^2 = 1$ или $x^2 = -16$. Значит, $x_{1,2} = \pm 1$, $y_{1,2} = -\dfrac{8}{2x_{1,2}} = \mp 4$. Таким образом, $\sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$.

Следовательно, $z_1 = \dfrac{3-2i+(1-4i)}{2} = 2-3i$, $z_2 = \dfrac{3-2i+(-1+4i)}{2} = 1+i$.

2. *Уравнения высших степеней.* Формула (12) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т. е. двучленного уравнения степени n. Гораздо сложнее обстоит дело в случае общего *алгебраического* уравнения степени n:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad (16)$$

где a_0, ..., a_n – заданные комплексные числа, $a_n \neq 0$.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (16), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу:*

остаток от деления многочлена $P_n(z)$ *на* $(z - z_0)$ *равен* $P_n(z_0)$.

Действительно, $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$, где остаток $r(z)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$, т. е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z) = r$ является числом: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r$.

Положим в этом равенстве $z = z_0$. Получаем $P_n(z_0) = 0 + r = r$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $(z - z_0)$ и $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.

Пример 16. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)=z^{1502}-90z^{175}+3$ на многочлен $z^2+1.$

Решение. Выполним деление с остатком:

$$z^{1502}-90z^{175}+3=\left(z^2+1\right)Q(z)+az+b. \tag{17}$$

Числа $z=\pm i$ являются корнями многочлена $z^2+1,$ поэтому подставим их в равенство (17).

$$z=i\to i^{1502}-90i^{175}+3=ai+b,$$

$$z=-i\to(-i)^{1502}-90(-i)^{175}+3=-ai+b.$$

Так как $i^{1502}=i^2=-1$ и $i^{175}=i^3=-i,$ то, упрощая, получаем систему

$$\begin{cases}2+90i=ai+b,\\ 2-90i=-ai+b.\end{cases}$$

Решение этой системы – это $a=90$ и $b=2,$ значит, остаток равен $r(z)=90z+2.$

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет на множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (16) всегда допускает представление в виде произведения

$$a_n(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}, \tag{18}$$

где $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_k$ – некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_k$ – натуральные числа, причём $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$ (доказательство может быть произведено индукцией по n).

Отсюда следует, что числа $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_k$ и только они являются корнями уравнения (16). При этом говорят, что z_1 является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т. д.

Если условиться считать корень уравнения столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет на множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Отметим также следующее утверждение. *Если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то $\overline{z}_0$ тоже является корнем этого многочлена.* Покажем это.

Если z_0 – корень многочлена $P_n(z),$ то $P_n(z_0)=0$. Тогда $\overline{P_n(z_0)}=\overline{0}=0,$ то есть $\overline{a_nz_0^n+a_{n-1}z_0^{n-1}+\ldots+a_1z_0+a_0}=0.$

Пользуясь равенствами (5а) –(5д), получаем, что

$$\overline{a_n}\left(\overline{z_0}\right)^n+\overline{a_{n-1}}\cdot\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\ldots+\overline{a_1}\overline{z_0}+\overline{a_0}=0.$$

Поскольку числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ действительные, то

$\overline{a_n}=a_n, \overline{a_{n-1}}=a_{n-1}, \ldots, \overline{a_0}=a_0.$

Тогда, $a_n\left(\overline{z_0}\right)^n+a_{n-1}\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\overline{z_0}+a_0=0,$ что и означает, что число $\overline{z_0}$ есть корень многочлена P_n.

Можно показать, что если для многочлена с действительными коэффициентами z_0 – корень кратности k, то и $\overline{z_0}$ – корень кратности k.

Разложение (18) для многочленов с действительными коэффициентами примет вид:

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{\alpha_1}\left(z-\overline{z_1}\right)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\left(z-\overline{z_2}\right)^{\alpha_2}\ldots \tag{19}$$

$$\ldots(z-z_l)^{\alpha_l}\left(z-\overline{z_l}\right)^{\alpha_l}\cdot(z-z_{l+1})^{\alpha_{l+1}}(z-z_{l+2})^{\alpha_{l+2}}\ldots(z-z_m)^{\alpha_m},$$

причём $2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l)+\alpha_{l+1}+\alpha_{l+2}+\ldots+\alpha_m=n.$

Здесь $z_1, z_2 \ldots, z_l$ – комплексные числа; $z_{l+1}, z_{l+2} \ldots, z_m$ – действительные числа.

Заметим, что $(z-z_i)\cdot\left(z-\overline{z_i}\right)=z^2-\left(z_i+\overline{z_i}\right)z+z_i\overline{z_i}$ есть квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Мы получили следующее утверждение: *любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами.*

Пример 17. Решите уравнение: а) $z^3=-2\overline{z}$; б) $|z|+iz=3-5i.$

Решение. а) Представим число z в тригонометрической форме:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Вспомним, что $|\overline{z}|=|z|,$ а в качестве одного из аргументов числа $\overline{z}$ можно выбрать $(-\varphi)$; кроме того $-2=2(\cos\pi+i\sin\pi).$ Тогда уравнение принимает вид:

$$\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)=2\rho\big(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\big)\big(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\big). \tag{20}$$

Возможны два случая:

1) $\rho=0,$ тогда $z=0,$ и это решение уравнения.

2) $\rho \neq 0.$ Тогда равенство (20) означает, что у чисел в левой и правой части равны модули, а аргументы отличаются на $2\pi k,\ k \in Z,$ т. е.

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho, \\ 3\varphi = -\varphi + \pi + 2\pi k,\ k \in Z, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} \rho = \sqrt{2}, \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z. \end{cases} \qquad (21)$$

Несложно понять, что мы получим всевозможные решения, если подставим в (21) значения $k = 0, 1, 2, 3.$

Итак,
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i\ (\text{при } k = 0);$$
$$z = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i\ (\text{при } k = 1);$$
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i\ (\text{при } k = 2);$$
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i\ (\text{при } k = 3).$$

Ответ: $0;\ 1+i;\ -1+i;\ -1-i;\ 1-i.$

б) Пусть $z = x + iy$. Тогда уравнение имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} + ix - y = 3 - 5i.$ Приравниваем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sqrt{25 + y^2} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ 25 + y^2 = y^2 + 6y + 9, \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = \dfrac{8}{3}, \end{cases}$$

т. е. $z = -5 + \frac{8}{3}i.$ **Ответ:** $-5 + \frac{8}{3}i.$

Выше сформулированные теоремы полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\frac{a_0}{a_1}$, корни уравнения второй степени $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ всегда могут быть получены с помощью формулы (14), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьей и четвертой степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени *выше четвёртой* подобных формул в общем случае просто не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни заданного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) может быть полезна следующая теорема: *целые ненулевые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z=k$ – целый корень уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

где a_0, a_1, ..., a_n – целые числа. Тогда $a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 = 0.$ Отсюда получаем, что $a_0 = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + \cdots + a_1),$ то есть k – делитель числа a_0 (число $a_n k^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + \cdots + a_1$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 18. Решите уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0.$

Решение. Рассматривая делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z=5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z-5$:

$$\begin{array}{rl|l}
- & z^3 - 4z^2 - 4z - 5 & z-5 \\
\cline{3-3}
 & z^3 - 5z^2 & z^2 + z + 1 \\
\cline{1-2}
- & z^2 - 4z & \\
 & z^2 - 5z & \\
\cline{1-2}
- & z - 5 & \\
 & z - 5 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z-5)(z^2 + z + 1).$

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ (см. пример 14), получаем остальные корни. Итак, $z_1 = 5,\quad z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

В заключение рассмотрим ещё два примера на вычисление комплексных корней многочленов и на применение формулы (19).

Пример 19. Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, имеющий корни $z_1 = z_2 = 2,\ z_3 = 1+i.$

Решение. Поскольку многочлен $P(z)$ имеет действительные коэффициенты и комплексный корень z_3, то число $z_4 = \overline{z_3} = 1-i$ так же является его корнем. Тогда наименьшая степень многочлена равна 4 и по формуле (19)

$$P_4(z) = 1(z-z_1)^2(z-z_3)\left(z-\overline{z_3}\right) = (z-2)^2\left(z-(1+i)\right)\left(z-(1-i)\right) =$$

$$= \left(z^2-4z+4\right)\left(z^2-2z+2\right) = z^4-6z^3+14z^2-16z+8.$$

Пример 20. Найдите все корни уравнения $z^6 - 2\sqrt{3}z^3 + 4 = 0$ и разложить левую часть уравнения в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.

Решение. Пусть $u = z^3$, тогда u есть решение квадратного уравнения $u^2 - 2\sqrt{3}u + 4 = 0.$ Его корни $u_{1,2} = \sqrt{3} \pm i$. Для нахождения z надо решить 2 уравнения в комплексных числах: $z^3_{1,2} = u_{1,2}.$ Каждое из них имеет 3 корня. Находим эти корни по формуле (12): $z^3 = \sqrt{3}+i \Leftrightarrow z^3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$ откуда $\varphi_1 = \arg u_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$\varphi_2 = \arg u_2 = \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Уравнение $z^3 = \sqrt{3}+i$ имеет 3 комплексных корня

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0; 1; 2.$$

$$z^3 = \sqrt{3}-i \Leftrightarrow z^3 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_n = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right)\right),\ n = 0; 1; 2.$$

Значит данное уравнение имеет следующие 6 корней:

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right),\quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right),\quad z_4 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right),$$

$$z_5 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi}{18}\right),\quad z_6 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{18} + i\sin\frac{23\pi}{18}\right).$$

Далее наше уравнение не имеет действительных корней, значит в его разложении (19) в произведение будут только многочлены второй степени с действительными коэффициентами вида $(z-z_k)\left(z-\overline{z_k}\right)$. Среди корней $z_1,\ldots,z_6$ комплексно сопряжёнными являются: z_1 и $z_4\left(\arg z_1=-\arg z_4\right)$, z_2 и $z_6\left(\arg z_2+\arg z_6=2\pi\right)$, z_3 и z_5. Поскольку $z_1+z_4=2\sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{18}$, $z_1\cdot z_4=\sqrt[3]{4}\left(\cos^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{\pi}{18}\right)=\sqrt[3]{4}$, то по теореме Виета $(z-z_1)(z-z_4)=z^2-2\sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)z+\sqrt[3]{4}$. Аналогично

$$(z-z_2)(z-z_6)=z^2-2\sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)z+\sqrt[3]{4},$$

$$(z-z_3)(z-z_5)=z^2-2\sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{25}{18}\right)z+\sqrt[3]{4}.$$

Тогда $$z^6-2\sqrt{3}z^3+4=\left(z^2-2\sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)z+\sqrt[3]{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(z^2-2\sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)z+\sqrt[3]{4}\right)\left(z^2-2\sqrt[3]{2}\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right)z+\sqrt[3]{4}\right).$$

Пример 21. Число $z=1$ является корнем уравнения $z^3+az^2+(9-6i)z-5+5i=0$. Найдите a и решите уравнение.

Решение. Подставляя $z=1$ в уравнение, получаем $1+a+9-6i-5+5i=0,$ откуда $a=-5+i$. Так как $z=1-$корень, то левая часть уравнения делится на $(z-1)$. Подставляем $a=-5+i$ и делим левую часть уравнения на $(z-1)$:

$$\begin{array}{l|l}
z^3+z^2(-5+i)+z(9-6i)-5+5i & z-1 \\ \cline{2-2}
\underline{z^3-z^2} & z^2+(-4+i)z+5-5i \\
\quad z^2(-4+i)+z(9-6i) & \\
\quad \underline{z^2(-4+i)+z(4-i)} & \\
\qquad\qquad (5-5i)z-5+5i & \\
\qquad\qquad \underline{(5-5i)z-5+5i} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Значит, $z^3+z^2\left(-5+i\right)+z\left(9-6i\right)-5+5i=\left(z-1\right)\left(z^2+\left(-4+i\right)z+5-5i\right).$

Далее решаем квадратное уравнение $z^2+\left(-4+i\right)z+5-5i=0$.

$D=\left(-4+i\right)^2-4\left(5-5i\right)=15-8i-20+20i=-5+12i.$ Для вычисления значений $\sqrt{D}=\sqrt{-5+12i}$ в алгебраической форме используем формулы (15а), (15б). Для $x=\mathrm{Re}\left(\sqrt{D}\right)$, $y=\mathrm{Im}\left(\sqrt{D}\right)$ получаем систему уравнений

$\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=12 \end{cases}$ решая которую, находим $x_1=2,\ y_1=3$ и $x_2=-2,\ y_2=-3.$

Значит, $\sqrt{D}=\pm\left(2+3i\right)$ и $z_1=\dfrac{4-i+\left(2+3i\right)}{2}=3+i,$

$$z_2=\frac{4-i-\left(2+3i\right)}{2}=1-2i.$$

Ответ. $a=-5+i.$ Корни уравнения: $z_1=3+i,\ z_2=1-2i,\ z_3=1.$

Контрольные вопросы

1(4). Выполните вычисления (ответ запишите в алгебраической форме):

а) $\left(2i+5\right)-6\left(3i-2\right)$; **б)** $\left(4+i\right)\left(2i-1\right)$; **в)** $i^7+i^6+i^5+i^4$; **г)** $\dfrac{8+i}{4-6i}$.

2(4). Запишите следующие комплексные числа в тригонометрической форме: **а)** $z=5$; **б)** $z=-4$; **в)** $z=3i$; **г)** $z=6-2i\sqrt{3}.$

3(5). Известно, что $\varphi=\arg z,\ \rho=\left|z\right|$. Найдите модуль и один из аргументов для каждого из следующих комплексных чисел:

а) $-z$; **б)** $\overline{z}$; **в)** $\dfrac{4i}{z^3}$; **г)** $z+\overline{z}$.

4(4). Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\left|z-i\right|=5$; **б)** $\left|z-5\right|=i$; **в)** $\left|3+i-z\right|=\left|z+5i+1\right|$; **г)** $\cos\left(\arg z\right)=\dfrac{1}{2}$.

5(6). Вычислите, используя тригонометрическую форму комплексного числа: Ответ запишите в алгебраической форме.

а) $\dfrac{\left(i-\sqrt{3}\right)^{2016}}{4^{1008}}$; **б)** $\sqrt[6]{-64}$; **в)** $\sqrt[4]{8i\sqrt{3}-8}$.

6(3). Решите квадратные уравнения:

а) $2z^2-7z+7=0$; **б)** $2iz^2+\left(2+5i\right)z+\left(13+i\right)=0$.

7(3). Делится ли многочлен $z^5+3iz^4-2z^3-2z^2-6iz+4$ на многочлен **а)** $z+2i$; **б)** $z-i$? Если нет, то найдите остаток от деления.

8(4). Определите кратности корней $z_1=-2i$ и $z_2=i$ для многочлена $z^6-2iz^5+4z^4-10iz^3-z^2-8iz-4$.

Задачи

1(5). Представьте число z в тригонометрической форме, если

а) $z=\sin\dfrac{13\pi}{5}+i\cos\dfrac{2\pi}{5}$; **б)** $z=1+\sin 4\alpha+i\cos 4\alpha$, $\dfrac{\pi}{8}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

2(12). Решите уравнения: **а)** $\left(\overline{z}\right)^2=3z^3$; **б)** $z^2-z\left|z\right|+\left|z\right|^2=0$;

в) $\left(iz-1\right)^4=\left(z+3\right)^4$; **г)** $4\overline{z}^2-4z\left|z\right|+3=0$.

3(6). Изобразите на комплексной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $\dfrac{z+4i}{1-3i}=\dfrac{\overline{z}-4i}{1+3i}$; **б)** $\dfrac{\pi}{6}\le\arg\left(6iz-12i-18\right)\le\dfrac{2\pi}{3}$; **в)** $\left|\dfrac{z-i}{z+2}\right|=3$.

4(3). Найдите $z^n+\dfrac{1}{z^n}$, если $z+\dfrac{1}{z}=-1$, $n\in\mathbb{N}$.

5(4). Среди чисел z, принадлежащих множеству D, найдите число с наименьшим модулем, если множество D задано следующим неравенством **а)** $\left|z+5i\right|\le\left|z-1+i\right|$; **б)** $\left|z+3i-4\right|\ge 7$.

6(2). Решите уравнение $z^4+z^3-4z^2+8z-8=0$, если известно, что число $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ является его корнем.

7*(5). Вычислите сумму

$$S=\cos\varphi+a\cos 2\varphi+a^2\cos 3\varphi+\ldots+a^{n-1}\cos n\varphi.$$

8(4). Сумма квадратов корней уравнения $z^3-6z^2+\alpha z+40=0$ равна 28. Найдите α и решите это уравнение.

9(2). Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа $z_1=2-i,$ $z_2=3-i$ и $z_3=-2.$

10(4) Представьте следующие многочлены в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

а) $P(z)=324z^4+1;$ **б)** $Q(z)=2z^4+7z^3-27z^2+16z-12.$

11(4). Пусть D_1 – множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что: $|\mathrm{Rez}|+|\mathrm{Imz}-8|\le 2;$ D_2 – множество точек z_2 комплексной плоскости таких, что $z_2=\dfrac{3}{2}iz_1.$

а) Изобразите на комплексной плоскости множества D_1 и D_2.

б) Найдите расстояние между множествами D_1 и D_2 (т. е. наименьшее расстоянием между точками z_1 и z_2, такими, что $z_1\in D_1,$ $z_2\in D_2$).

12(4). Найдите остаток от деления многочлена $3z^{2017}-2z^{503}+4z^{302}+8$ на многочлен $z^2-z+1.$