

**Федеральное агентство по образованию  
Федеральная заочная физико-техническая школа  
при Московском физико – техническом институте  
(государственном университете)**

**МАТЕМАТИКА**

**Показательные и логарифмические  
уравнения, системы, неравенства**

Задание №5 для 11-х классов

(2008-2009 учебный год)



г. Долгопрудный, 2009

*Составитель:* С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

**Математика: задание №5 для 11-х классов (2008-2009 учебный год). - М.: МФТИ, 2009, 32с.**

Составитель:

**Колесникова Софья Ильинична**

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 13.01.09

Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0

Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1600. Заказ №13-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа  
Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**  
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**  
тел.409-9583 – **очное отделение**

***E.mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)**

© ФЗФТШ при МФТИ, 2009

## §1. Введение

Напомним основные свойства показательной и логарифмической функций.

В школе принимается без доказательства, что для любых положительных чисел  $a$  и  $b$  и любых действительных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  справедливы свойства:

$$C1. a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}. \quad C2. \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

$$C3. a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \quad C4. \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha.$$

Если  $a > 0, a \neq 1$ , то функция  $a^x$  отлична от постоянной. Ее называют показательной функцией с основанием  $a$ . Если  $a > 1$ , то функция  $a^x$  – монотонно возрастающая на  $R$ ; если  $0 < a < 1$ , то функция  $a^x$  – монотонно убывающая на  $R$ . Область значений показательной функции – множество  $R_+$  всех положительных чисел. Отсюда и из монотонности следует, что, если  $a > 0, a \neq 1$ , то для любого положительного числа  $N$  существует единственное число  $x$ , такое, что  $a^x = N$ . Это число называется логарифмом числа  $N$  по основанию  $a$  и обозначается  $\log_a N$ . Из определения следует, что

$$a^{\log_a N} = N \text{ в ОДЗ}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для  $N > 0, a > 0, a \neq 1$ ).

В школе показывается, что, если  $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, \alpha$  – любое действительное число, то верны формулы

$$C5. \log_a MN = \log_a M + \log_a N. \quad C6. \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

$$C7. \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

$$C8. \text{Если, к тому же, } b > 0, b \neq 1, \text{ то } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Последняя формула позволяет переходить от логарифма по основанию  $a$  к логарифму по основанию  $b$ . Она называется формулой перехода к новому основанию.

Свойства 5 – 8 при вышеописанных условиях ( $M > 0, N > 0$ ) являются тождествами и читаются как справа налево, так и слева направо.

Заметим, однако, что левые и правые части равенств в C5 и C6 имеют разные области определения: левая часть определена при  $MN > 0$ , а правая – при  $M > 0, N > 0$ . Это надо учитывать при решении задач:  $MN > 0$  не только тогда, когда  $M > 0, N > 0$ , но и тогда, когда  $M < 0, N < 0$ . Учтем, что  $MN = (-M)(-N)$ , и для  $-M > 0, -N > 0$  (в силу C5)  $\log_a(-M)(-N) = \log_a(-M) + \log_a(-N)$ .

Теперь запишем более общую формулу

$$C5^*. \text{Если } MN > 0, \text{ то } \log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|.$$

$$C9. \text{Если } M \neq 0, N \neq 0, \text{ то } \log_a |M| + \log_a |N| = \log_a |MN|.$$

Аналогично показывается, что

$$C6^*. \text{Если } MN > 0, \text{ то } \log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|.$$

$$C10. \text{Если } M \neq 0, N \neq 0, \text{ то } \log_a |M| - \log_a |N| = \log_a \left| \frac{M}{N} \right|.$$

$$C7^*. \text{Если } M \neq 0, \text{ то для любого натурального } n \text{ верно, что } \log_a M^{2n} = 2n \log_a |M|.$$

*Все свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами), при выполнении приведенных для каждого из них условий.*

## §2. Логарифмирование и потенцирование

При решении показательных и логарифмических уравнений особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование.

рифмирование. Эти преобразования не являются равносильными. Логарифмированием уравнения  $f(x) = g(x)$  по основанию  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) называется переход к уравнению  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ . При этом область существования уравнения сужается, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел.

Например,  $x^3 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \text{ а } \lg x^3 = \lg x \Leftrightarrow x = 1. \\ x = 1. \end{cases}$  Уравнения не

равносильны, т. к. имеют разные множества решений.

Потенцированием называется переход от уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  к уравнению  $f(x) = g(x)$ . При этом область определения расширяется, т. к. второе уравнение может существовать при любых  $f(x), g(x)$ , а первое – только при положительных. Поэтому запишем и запомним:

C11. Если  $f(x) = g(x)$  и  $f(x) > 0$  или  $g(x) > 0$ , то  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ .

C12. Если  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , то  $f(x) > 0, g(x) > 0$  и  $f(x) = g(x)$ .

При решении логарифмического уравнения достаточно проверить положительность одной из функций, т. к. из последующего их равенства следует положительность и другой. Итак, из C11 и C12 следует условие равносильности

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (\text{УР Л1})$$

### §3. Показательные уравнения

Из монотонности показательной функции следует, что  $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ .

Из свойств показательной функции следует, что, если  $a > 0, a \neq 1$ , то простейшее показательное уравнение  $a^x = b$  при  $b \leq 0$  не имеет решения, а при  $b > 0$  имеет единственный корень  $x = \log_a b$ .

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовать исходное уравнение к более простому. Более простыми можно считать два основных уравнения:

1.  $a^{f(x)} = b(x) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b(x)$ ,
2.  $g(a^{f(x)}) = 0$ .

Уравнение 2 заменой переменной  $a^{f(x)} = t$  сводится к уравнению  $g(t) = 0$ , у которого отыскиваются положительные корни, а затем решаются уравнения типа 1. Заметим, что

$$1^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow 1 = g(x), \quad 0^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

**Пример 1.** (МГУ, 1970).  $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ .

$$\begin{aligned} \diamond 4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right)^2 - 9\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right) + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2\right)\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{-1}{3}; \end{cases} \\ \sqrt{3x^2-2x} = -2 \Leftrightarrow \emptyset. \end{cases}$$

**Ответ.**  $1, \frac{-1}{3}$ .  $\diamond$

**Пример 2.**  $8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0$ .

$$\diamond 8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13 \cdot 2^{2x} 3^x - 2^x 3^{2x} + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x} \left( 1 - 13 \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^x - \left( \frac{3}{2} \right)^{2x} + 13 \left( \frac{3}{2} \right)^{3x} \right) = 0 \quad (*)$$

Пусть  $\left( \frac{3}{2} \right)^x = t > 0$ , тогда (\*) примет вид  $1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0$ .

$$1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0 \Leftrightarrow (1 - t^2)(1 - 13t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; \frac{1}{13} \Rightarrow x = 0; -\log_{\frac{3}{2}} 13.$$

**Ответ:**  $0, -\log_{\frac{3}{2}} 13$ . ♦

**Пример 3.**  $500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}}$ .

$$\diamond 500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x-1) \log_2 2 = \frac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_5 2 - 3 \pm (\log_5 2 + 3)}{6 \log_5 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{cases}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{3}, -\log_2 5$ . ♦

**Пример 4.**  $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} = 5$ . ♦ Это уравнение удается решить, используя то, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает только один раз. Подбором убеждаемся, что  $x = -1$ .

**Ответ:**  $-1$ . ♦

**Пример 5.** (МГУ, 1997, псих. ф – т.) При каких действительных  $p$  уравнение  $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$  имеет решение?

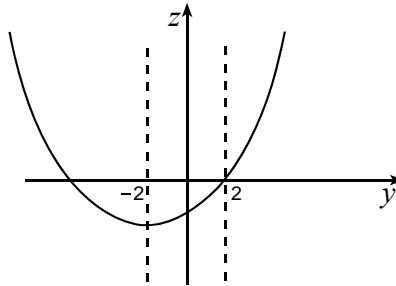
$$\blacklozenge 4^x + 4 \cdot 2^x + 7 + \frac{4}{2^x} + \frac{1}{4^x} - p = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} + 4 \cdot 4^x \cdot 2^x + (7-p) \cdot 4^x + 4 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

Пусть  $t = 2^x > 0$ . Тогда уравнение примет вид

$$t^4 + 4t^3 + (7-p)t^2 + 4t + 1 = t^2 \left( t^2 + 4t + (7-p) + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0.$$

Это возвратное уравнение. Оно решается заменой переменных  $y = t + \frac{1}{t}$ , причем  $y = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{(t-1)^2 + 2t}{t} = 2 + \frac{(t-1)^2}{t} \geq 2$  для любого  $t > 0$ . Уравнение принимает вид

$$\left( t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 4 \left( t + \frac{1}{t} \right) + (5-p) = y^2 + 4y + (5-p) = 0.$$



Так как вершина параболы  $z = y^2 + 4y + (5-p)$  расположена слева от оси  $z$  и ветви направлены вверх, то корень  $y_0 \geq 2$  существует тогда и только тогда, когда  $z(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + 5 - p \leq 0 \Leftrightarrow p \geq 17$ .

**Ответ:**  $[17; +\infty)$   $\blacklozenge$

#### §4. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлогарифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо



помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), и потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, то надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения. Для любых  $a > 0, a \neq 1$

$$1. \quad \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{УР Л1})$$

Из двух систем удобно выбирать ту, которая проще.

$$2. \quad g(\log_a f(x)) = 0.$$

**Пример 6.** (МГУ, 1997, биофак)  $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1$ .

◆

$$\log_3 x + \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{13} - 1}{2}. \quad \blacklozenge$$

**Пример 7.** (МГУ, 1998, ф – т почв.)

$$\blacklozenge \log_{0,5} \left( \log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0.$$

$$\begin{aligned} \log_{0,5} \left( \log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\log_2 \left( -\frac{\log_2 x}{2} \right) + \frac{\log_2 (4 + 2 \log_2 x)}{2} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2 (4 + 2 \log_2 x) = \log_2 \left( -\frac{\log_2 x}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ 4 + 2 \log_2 x = \frac{1}{4} \log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

**Ответ:**  $2^{4-4\sqrt{2}}$ . ♦

**Пример 8.** (МГУ, 1999, псих. ф-т)  $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$ .

$$\begin{aligned} \diamond x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 &\Leftrightarrow (2^{\log_2 x})^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{2 \log_7 x} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_7 x})^2 + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}$ . ♦

Особняком стоят уравнения и неравенства, которые нельзя отнести ни к показательным, ни к логарифмическим. Они содержат функции вида  $\log_{a(x)} f(x)$  и  $(a(x))^{f(x)}$ .

**§5. Сложная экспонента. Уравнение вида  $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$**

*Рассмотрим выражение  $y(x) = a(x)^{f(x)}$ . Что это за функция, какова ее область определения?*

*По определению*, полагают, для любого  $c > 0, c \neq 1, a(x) > 0$

$$\boxed{a(x)^{b(x)} = c^{b(x) \log_c a(x)}} \quad (01)$$

**Рассмотрим уравнение**  $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$ .

ОДЗ:  $a(x) > 0$ .

$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)}$ ,  $a(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)}$ , тогда

$$10^{f(x)\lg a(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg a(x) = 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ Следовательно,}$$

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ в ОДЗ.}} \quad (\text{УР ПЗ})$$

или

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}} \quad (\text{УР ПЗ*})$$

**Замечание.** Мы не решаем уравнение  $(-2)^x = -8$ , потому что  $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$ , где левая часть существует, а правая часть не определена (в уравнении нет ограничений для  $x$ , и оно может принимать рациональные значения!). Однако, мы решаем уравнение  $(-2)^n = -8$ , где *заранее* задано, что  $n$  – число целое (операции возведения в рациональную степень и натуральную степень разные! Вспомним, кстати, что  $\sqrt[3]{-8} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$ , т. к. левая часть существует, а правая – нет).

**Пример 9.** Решите уравнение  $x^{x^2} = x^{-2-3x}$ .

♦ ОДЗ:  $x > 0$ .

$$\text{В ОДЗ } x^{x^2} = x^{-2-3x} \Leftrightarrow 10^{x^2 \lg x} = 10^{(-2-3x)\lg x} \Leftrightarrow \lg x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x(x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Корни  $-1, -2$  *не входят в ОДЗ*. Это, несмотря на то, что  $(-1)^1 = (-1)^1, (-2)^4 = (-2)^4$ .

Ответ:  $\{1\}$ . ♦

**Пример 10.** (МГУ, 1998, химфак.) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x + (\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = 2(\sqrt{2})^x$  имеет единственное решение?

♦ Сначала упростим левую часть уравнения. Замечаем, что

$$(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = \frac{2^x}{(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x}.$$

Пусть  $t = (\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x$ , тогда уравнение примет вид:

$$t + \frac{2^x}{t} = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow t^2 - 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot t + 2^x = \left(t - 2^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \text{В силу (УР ПЗ),}$$

$$x \lg(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}) = x \lg \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (*)$$

Мы видим, что при любом значении параметра  $a$  есть решение  $x = 0$ , поэтому для единственности решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение совокупности не имело решений.

ОДЗ (\*):  $x^2 - 3ax + 6 \geq 0$ .

Если  $x^2 - 3ax + 6 > 0$ , то  $\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} > \sqrt{2}$ .

Если  $x^2 - 3ax + 6 = 0$ , то  $\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} = \sqrt{2}$ .

Заданное уравнение имеет единственное решение ( $x = 0$  является решением данного уравнения при любом  $a$ !), если уравнение

$x^2 - 3ax + 6 = 0$  не имеет решений, что имеет место тогда и только тогда, когда  $9a^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ .

**Ответ:**  $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ . ♦

### §6. Логарифмы с переменным основанием.

Уравнения вида  $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$

*Рассмотрим выражение*  $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$ .

*По определению*, для любого  $c > 0, c \neq 1$

$$\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)} \quad (02)$$

т. е.  $y(x)$  – это частное двух логарифмов, и областью определения (ОДЗ) является множество  $X$ , на котором

$$\underline{f(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1.}$$

*Рассмотрим уравнение*  $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ .

ОДЗ:  $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$ .

Воспользуемся определением (02) и получим в ОДЗ

$$\begin{aligned} \log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) &\Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = \frac{\lg g(x)}{\lg a(x)} \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = g(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ в ОДЗ.}} \quad (\text{УР ЛЗ})$$

Можно записать полное условие равносильности

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{УР ЛЗ*})$$

**Пример 11.** (МФТИ, 1981) Решите уравнение

$$2 \log_x (4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2.$$

$$\diamond \quad 2 \log_x (4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2 \Leftrightarrow \log_x (4 + \sqrt{x}) = 1 - \log_x 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x (4 + \sqrt{x}) = \log_x \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 8 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

**Ответ:** 16.  $\diamond$

*Метод интервалов для логарифмических и показательных неравенств.*

В курсе математического анализа для 10-го класса доказывается теорема:

*Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и не обращается в 0 на открытом промежутке  $(a, b)$ , то  $f(x)$  имеет один и тот же знак во всех внутренних точках отрезка  $[a; b]$ .*

Это и есть основание для метода интервалов для непрерывной функции: найти нули  $f(x)$  и определить знаки  $f(x)$  на промежутках между соседними нулями, вычислив значения в пробных точках.

### §7. Показательные неравенства

Рассмотрим неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ .

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – непрерывные функции на некотором промежутке  $X$ , где задано число  $a > 0$ . Тогда  $a^{f(x)}, a^{g(x)}$  – тоже непрерывны на  $X$  и к неравенству  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  применим метод интервалов. Его решение зависит от того,  $a > 1$  или  $a < 1$ .

1) Если  $a > 1$ , то  $f(x) > g(x)$  и  $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$ .

2) Если  $0 < a < 1$ , то  $f(x) < g(x)$  и опять  $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$ .

Верно и обратное:

1. если  $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$ , то при  $a > 1$  имеем  $f(x) > g(x)$  и  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ;

2. если  $0 < a < 1$ , то  $f(x) < g(x)$  и опять  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ .

Таким образом, мы вывели условие равносильности

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0} \quad (\text{УР П1})$$

При рассмотрении неравенства  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$  меняется знак неравенства в (УР П1), и мы видим, что

$$\boxed{\text{знак разности } a^{f(x)} - a^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-g(x))} \quad (\text{УР П2})$$

**Пример 12.** (МГУ, 1999, ф – т почв.) Решите неравенство

$$3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

$$\blacklozenge 3 \cdot 2^{2\sqrt{2-x}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}} + 3 < 0 \Leftrightarrow (2^{\sqrt{2-x}} - 3) \left( 2^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3} \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} - 3 < 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2-x} < \log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2-x < \log_2^2 3 \Leftrightarrow 2 - \log_2^2 3 < x \leq 2.$$

**Ответ:**  $(2 - \log_2^2 3; 2]$ .  $\blacklozenge$

**Пример 13.** (МГУ, 1999, мехмат.). Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

$$\begin{aligned} \diamond 3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3} &\Leftrightarrow 3^{x^2+6x+9} + 3^{-2} \leq 3^{x^2-2} + 3^{6x+9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{x^2} (3^{6x+9} - 3^{-2}) - (3^{6x+9} - 3^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow (3^{x^2} - 3^0) (3^{6x+9} - 3^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{В силу (УР П2), } x^2(6x+9+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \leq -\frac{11}{6}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{11}{6}\right] \cup \{0\}. \diamond$$

**Пример 14.** Решите неравенство  $\frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)} \geq 0$ .

$$\diamond \frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-0)(x^2-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2, \\ \frac{x-1}{x(x-2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;1] \cup (2;+\infty).$$

$$\text{Ответ: } (0;1] \cup (2;+\infty). \diamond$$

**Пример 15.** (МГУ, 2000, почв.) Решите неравенство  $2^{x^2} \cdot 3^x < 6$ .

$$\begin{aligned} \diamond 2^{x^2} \cdot 3^x < 6 &\Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{x \log_2 3} < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow 2^{x^2 + x \log_2 3} < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + x \log_2 3 - \log_2 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x + \log_2 6) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 6 < x < 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (-\log_2 6; 1). \diamond$$

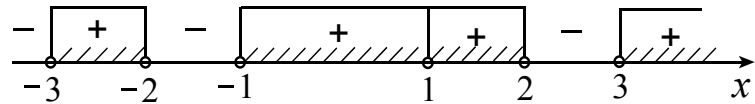


**Пример 16.** Решите неравенство

$$\frac{(3^{x^2} - 3)(2^{-x} - 2^3)(4^x - 4^{x^2+2x-2})}{(x^2 - 5x + 6)} > 0.$$

$$\diamond \frac{(3^{x^2} - 3)(2^{-x} - 2^3)(4^x - 4^{x^2+2x-2})}{(x^2 - 5x + 6)} > 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x^2 - 1)(-x - 3)(x - x^2 - 2x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2(x + 1)(x + 3)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0 \Leftrightarrow$$



С рисунка снимаем

**Ответ:**  $(-3; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$ . ♦

**Пример 17.** (МГУ, 1973, биофак) Найти все значения параметра  $a$ , для каждого из которых неравенство  $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$  имеет хотя бы одно решение.

♦ Пусть  $2^x = t > 0$ , тогда неравенство примет вид  $t^2 - at - a + 3 \leq 0$ . Прежде всего, неравенство имеет решение, если дискриминант неотрицателен, т. е.

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2) \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty).$$

$$\text{При этом, } t^2 - at - a + 3 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[ \frac{a - \sqrt{D}}{2} = t_1; \frac{a + \sqrt{D}}{2} = t_2 \right].$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все  $a$ , при которых неравенство верно хотя бы при одном положительном значении  $t$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы больший корень был положительным, т. е.

$$t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a^2 + 4a - 12 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2; \quad \Leftrightarrow a \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 + 4a - 12 - a^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset;$$

Ответ:  $[2; +\infty)$ . ♦

### §8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство  $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$ , где  $a(x), f(x), g(x)$  – непрерывные функции. ОДЗ:  $a(x) > 0$ .

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве  $c$  число  $e$  (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид  $e^{f(x)\ln a(x)} > e^{g(x)\ln a(x)}$ . Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$$(e-1)(f(x)\ln a(x) - g(x)\ln a(x)) = (e-1)(f(x) - g(x))\ln a(x) > 0,$$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство  $(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0$ .

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ. (УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \quad (\text{УР П5*})$$

Поэтому

$$\boxed{\text{знак разности } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ.}} \quad (\text{УР П6})$$

**Преимущество** (УР П6) состоит в том, что, если  $a(x), f(x), g(x)$  – рациональные функции, то за **ОДИН ШАГ** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

**Пример 18.** Решите неравенство

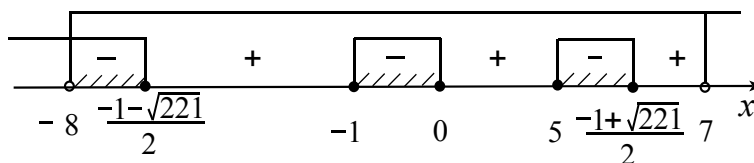
$$(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x}.$$

♦ ОДЗ:  $56 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 56 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8; 7)$ .

В ОДЗ, в силу (УР П6),  $(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (56 - x - x^2)(x^3 - 2x^2 - 2x^2 - 5x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right) x(x+5)(x-1) \leq 0 \Rightarrow$$



**Ответ:**  $\left[-8; \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right] \cup [-1; 0] \cup \left[5; \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right]$ . ♦

### §9. Логарифмические неравенства. Неравенства вида

$$\log_a f(x) > 0 \text{ и } \log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Пусть  $f(x) > 0, f(x)$  непрерывна на  $(c; d)$ , тогда  $\log_a f(x)$  тоже непрерывен на  $(c; d)$ , и для решения неравенства  $\log_a f(x) > 0$  применим метод интервалов. При решении этого неравенства значения  $f(x)$  в “пробных” точках придется сравнивать с единицей. Если “пробные” точки не очень удобные, то вычисления могут оказаться довольно громоздкими. Поэтому с самого начала учтем это.

**Рассмотрим неравенство**  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ , где  $a$  – заданное положительное число,  $a \neq 1$ .

ОДЗ:  $f(x) > 0$ .

Покажем, что имеет место условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л4})$$

Действительно,

1. Если  $a > 1$ , то  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$  тогда и только тогда, когда  $f(x) > 1 (< 1)$ , т. е.  $(a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0)$ .

2. Если  $0 < a < 1$ , то  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$  тогда и только тогда, когда  $f(x) < 1 (> 1)$ , т. е. опять  $(a-1)(f(x)-1) < 0 (> 0)$ . И, наоборот.

Если  $(a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0)$ , то

1. при  $a > 1$  имеем  $f(x) > 1 (< 1)$ , а тогда  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ ,

2. при  $0 < a < 1$  имеем  $f(x) < 1 (> 1)$ , а тогда  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ .

Отсюда еще следует, что

$$\boxed{\text{знак } \log_a f(x) \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-1) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л5})$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\boxed{\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0). \end{cases}} \quad (\text{УР Л5*})$$

Рассмотрим неравенство  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , где  $a > 0, a \neq 1$ .

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что верно и такое условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л6})$$

а также полное условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0). \end{cases}} \quad (\text{УР Л6*})$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{\text{знак разности } \log_a f(x) - \log_a g(x) \text{ совпадает со} \\ \text{знаком произведения } (a-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л7})$$

При решении простейших логарифмических неравенств, конечно, можно не использовать (УР Л4) и (УР Л6). Однако, (УР Л4) и (УР Л6) дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

**Пример 19.** Решите неравенство

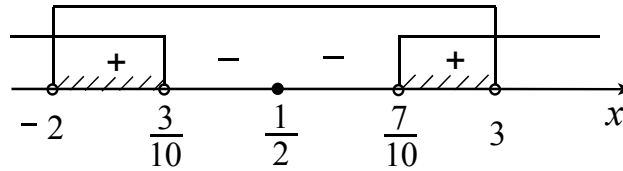
$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(6 + x - x^2)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0.$$

$$\blacklozenge \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 3x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in R, \\ -x^2 + x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 3).$$

$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(-x^2 + x + 6)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{В ОДЗ, в силу (УР Л7),}$$

$$\frac{3x^2 - 3x + 7 + x^2 - x - 6}{\left(x - \frac{7}{10}\right)\left(x - \frac{3}{10}\right)} = \frac{(2x-1)^2}{\left(x - \frac{3}{10}\right)\left(x - \frac{7}{10}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; +\infty\right) \Rightarrow x \in \left(-2; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; 3\right) \Rightarrow$$



**Ответ:**  $\left(-2; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; 3\right)$ .

В этом примере разность логарифмов *не меняет* знак при переходе через точку  $x = \frac{1}{2}$ , а следующие нули находятся близко. “Пробные”

точки подставлять затруднительно. ♦

**Пример 20.** (МГУ, 1998, мех – мат.) Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \cdot \log_3(-2x - x^2) \geq \log_3\left(\frac{|x|}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot \log_2(-2x - x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{♦ ОДЗ: } & \begin{cases} x + 5,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5,5; \\ \sqrt{x + 5,5} + \frac{x+2}{2} > 0, & \Leftrightarrow x \in (-2; 0). \\ -2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \log_3(-2x - x^2) \geq \log_3\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \log_2(-2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \log_2(-2x - x^2) \geq \log_2\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \log_2(-2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(-2x - x^2) \left( \log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) - \log_2\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$(-2x - x^2 - 1) \left( \sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1 - \frac{|x|}{2} - \frac{3}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

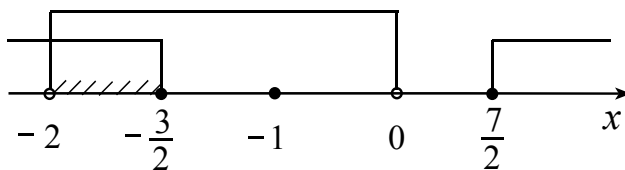
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left( \sqrt{x + \frac{11}{2}} + x - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad (|x| = -x \text{ в ОДЗ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left( \sqrt{x + \frac{11}{2}} - \left( \frac{1}{2} - x \right) \right) \leq 0 \Leftrightarrow \text{Т. к. } \left( \frac{1}{2} - x \right) > 0 \text{ в ОДЗ}$$

$$(x+1)^2 \left( x + \frac{11}{2} - \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left( -x^2 + 2x + \frac{21}{4} \right) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \left( x - \frac{7}{2} \right) \left( x + \frac{3}{2} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left( \left( -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{7}{2}; +\infty \right) \cup \{-1\} \right) \cap \text{ОДЗ. Учтываем ОДЗ:}$$



Получаем

**Ответ:**  $\left( -2; -\frac{3}{2} \right] \cup \{-1\}$ . ♦

**Пример 21.** (МФТИ, 1992)  $\frac{1}{x} \log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > 1$ .

♦ ОДЗ:  $\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 7^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_7 \frac{4}{9}$ .

Тогда в ОДЗ  $\frac{1}{x} \log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > \frac{x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) - x}{x} \equiv \frac{\log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) - \log_7 7^x}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$  В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} - 7^x > 0 \Leftrightarrow \frac{7^{2x} - \frac{9}{2} \cdot 7^x + 2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(7^x - 4) \left( 7^x - \frac{1}{2} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left( 7^x - 7^{\log_7 4} \right) \left( 7^x - 7^{\log_7 \frac{1}{2}} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x - \log_7 4) \left( x - \log_7 \frac{1}{2} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in \left( -\infty; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{С учётом ОДЗ, } x \in \left( \log_7 \frac{4}{9}; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4).$$

**Ответ:**  $\left( \log_7 \frac{4}{9}; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4)$ . ♦

### §10. Неравенства для логарифмов с переменным основанием

Рассмотрим неравенство  $\log_{a(x)} f(x) > 0$ , где  $a(x), f(x)$  непрерывны на промежутке  $X$ .

ОДЗ:  $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0$ . Оказывается, что и в этом случае

знак функции  $\log_{a(x)} f(x)$  совпадает со знаком произведения  $(a(x) - 1)(f(x) - 1)$  в ОДЗ

(УР Л9)

и имеет место условие равносильности

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow (a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ.} \quad (\text{УР Л10})$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.



$$\log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0 (< 0). \end{cases} \quad (\text{УР Л10*})$$

Для нестрогого неравенства это условие выглядит по-другому.

$$\log_{a(x)} f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) \geq 0 (\leq 0). \end{cases} \quad (\text{УР Л11})$$

Действительно, по определению,  $\log_{a(x)} f(x) = \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$ ,

$$a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0.$$

В силу предыдущего условия равносильности (УР Л5), знаки  $\lg f(x), \lg a(x)$  совпадают со знаками разностей  $f(x)-1$  и  $a(x)-1$  соответственно. Поэтому знак  $\frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$  совпадает со знаком частного

$$\frac{f(x)-1}{a(x)-1}, \text{ или со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-1).$$

Рассмотрим неравенство  $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ , где  $a(x), f(x), g(x)$  непрерывные функции и  $a(x) > 0, a(x) \neq 1$ .

По определению,  $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) = \frac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)}$ , и, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$\begin{array}{l} \text{знак разности } \log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \text{ совпадает} \\ \text{со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ.} \end{array} \quad (\text{УР Л12})$$

Из полученного условия равносильности следует, что

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{в} \\ \text{ОДЗ.} \end{matrix}} \quad (\text{УР Л13})$$

Заметим, что из (УР Л12) автоматически следует, что  $a(x) \neq 1$ , поэтому при решении **строгих неравенств** условие  $a(x) \neq 1$  в ОДЗ можно **опустить** и так записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) < 0. \end{cases}} \quad (\text{УРЛ 13*})$$

**Преимущество и красота приведенных условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований.** Теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

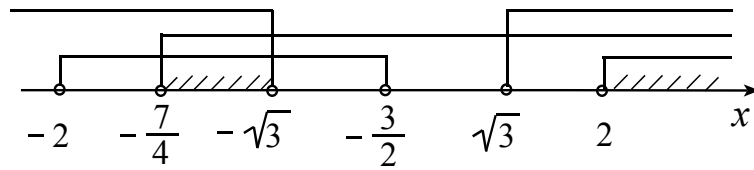
**Заметим**, что все условия равносильности **формально** точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

**Пример 22.** (МФТИ, 1980) Решите неравенство  $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$ .

♦ В силу (УР Л10),  $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}, \\ x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty), \\ (x^2-3-1)(4x+7-1) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty).$$



**Ответ:**  $\left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty)$ . ♦

Но, как показывает практика, не всегда этим удобно пользоваться полными условиями равносильности. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы часто и будем делать.

**Пример 23.** (МФТИ, 1994). Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right) \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ ОДЗ: } & \begin{cases} \frac{1}{3}-x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ 2x+\frac{1}{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{6}. \\ 2x+\frac{1}{3} \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pm 3-1}{6} \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) > \log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) > \log_2\left(\frac{1}{3}-x\right) - \frac{2}{3}\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}^2\left(\frac{1}{3}-x\right) - 3\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) + 2\right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \text{(т. к. } t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)\text{)} \\ & \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - 1\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - 2\right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - \right. \\ & \left. - \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2\right) > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

В ОДЗ, в силу (УР Л12),

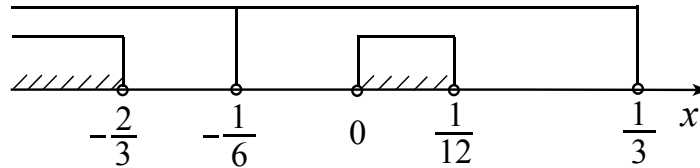
$$\begin{aligned} & \left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)^3\left(\frac{1}{3}-x-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\frac{1}{3}-x-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \text{(т. к. в ОДЗ } \frac{1}{3}-x > 0\text{)} \\ & \Leftrightarrow \left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)\left(\frac{1}{3}-x-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)(36x^2+21x-2) < 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{1}{3} - 1\right) \left(2x + \frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{3} - x - 2x - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - x + 2x + \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{12}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right)^3 \left(x - \frac{1}{12}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учтем ОДЗ



и получаем

**Ответ:**  $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$ . ♦

**Пример 24.** (МФТИ, 1996). Решите неравенство

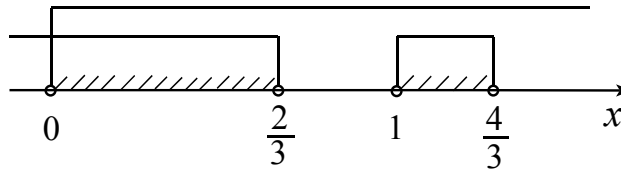
$$\log_{|3x-3|} (25^x - 9^x) < \log_{|3x-3|} (5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|} (5^{x-1} + 3^{x-1}).$$

♦  $\log_{|3x-3|} (5^x + 3^x)(5^x - 3^x) < \log_{|3x-3|} (5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|} (5^{x-1} + 3^{x-1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-3| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, \\ 5^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(|3x-3|-1\right) \left(5^x - 3^x - 5^{x-1} - 3^{x-1}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(|3x-3|-1\right) \left(\frac{4}{5}5^x - \frac{4}{3}3^x\right) < 0.$$

В силу (УР М5) и (УР П6),



$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow (3x-4)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^0\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) < 0$$

**Ответ:**  $\left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right)$ .

**Контрольные вопросы**

1(2). Вычислите значение выражения  $\log_{a^{17}} a^{\sqrt{3}} b^{-\sqrt{15}}$ , если  $\log_a b = \frac{1}{5}$ .

2(2). Число удовлетворяет условиям  $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$  и  $\sin 2x > 0$ . Обязательно ли при этих условиях определено выражение  $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$  и чему оно равно?

3(2). Вычислите  $9 \left( \log_{\frac{x}{y}}^2 x + \log_{\frac{y}{x}}^2 y \right)$ , если  $\log_{\frac{x}{y}} (x^9) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x}$ .

4(2). Найдите сумму всех корней уравнения  $4 \log_{25} 5x + \log_5^2 x - 5 = 0$ .

5(2). Найдите сумму квадратов всех корней уравнения  $\log_5 (x-2) + \log_5 (x+3) = \log_5 6$ .

6(2). Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения

$$\log_2 (x-8) + \log_2 (x-4) = \log_2 x + \log_2 6.$$

7(2). Найдите сумму квадратов всех корней уравнения

$$\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1).$$

8(2). Решите уравнение

$$\log_{0,5}\left(\log_4\frac{1}{x}\right) + \log_4(\log_2(16x^2)) = 0.$$

9(2). Решите уравнение

$$x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

10(2). Решите уравнение

$$\log_4(x^2) + \log_2(x+5) = 2$$

11(3). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{x+y} = 3^x \cdot 5^y, \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$$

### Задачи

1(2). Укажите минимальную длину промежутка, в котором расположены все решения неравенства

$$\frac{(2^x - 64)(x - 8)(3^x - 3^6)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^7} \geq 0.$$

2(2). Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства

$$2^x \leq 3 - \frac{1}{2^x - 1}.$$

3(2). Укажите минимальную длину промежутка, в котором расположены все решения неравенства

$$\sqrt{31 - 4x}(\sqrt{3} \cdot 4^x - \sqrt{2} \cdot 9^x) \leq 0.$$

4(2). Найдите сумму всех целочисленных решений неравенства

$$\left(\frac{25^x - 28}{5^x - 6} - 3\right)\sqrt{40 + 3x - x^2} \geq 0.$$

5(2). Найдите сумму длин промежутков, являющихся решением неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 3} \geq 0.$$

**6(2).** Найдите сумму всех целочисленных решений неравенства

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2 - 9)} \geq \frac{\log_5(x^2 + 8x + 12)}{\log_5(x^2 - 9)}.$$

**7(2).** Найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все решения неравенства

$$\sqrt{70 \frac{1}{8} - x} \cdot \left( \frac{\log_2 x - 3}{6 \log_x 2 - 1} - 2 \right) \leq 0.$$

**8(2).** Найдите сумму квадратов всех целочисленных решений неравенства

$$\log_{0,5}(\sqrt{5-x} - x + 1) > -3.$$

**9(3).** Решите неравенство

$$\log_{10-x^2} \left( \frac{16}{5} x - x^2 \right) < 1.$$

**10(3).** Решите неравенство

$$\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \leq 2.$$

**11(3).** Решите неравенство

$$(25x^2 - 50x + 21) \log_{-4x^2 + 12x - 8} |4x - 5| < 0.$$

**12(3).** Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2 - 18x + 91}{90}} \left( 5x - \frac{3}{10} \right) \leq 0.$$

**13(3).** Решите неравенство

$$\log_{7x-4} 3 + \frac{1}{\log_2(7x-4)} \geq \frac{1}{\log_6(9x^2 - 2x - 2)}.$$