§8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$, где $a(x), f(x), g(x)$ – непрерывные функции. ОДЗ: $a(x) > 0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число e (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид $e^{f(x)\ln a(x)} > e^{g(x)\ln a(x)}$. Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$$(e-1)(f(x)\ln a(x) - g(x)\ln a(x)) = (e-1)(f(x) - g(x))\ln a(x) > 0,$$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство

$$(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0.$$

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ.} \quad \text{(УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \quad \text{(УР П5*)}$$

Поэтому

знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

(УР П6)

Преимущество (УР П6) состоит в том, что, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за ***ОДИН ШАГ*** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

Пример 18. Решите неравенство

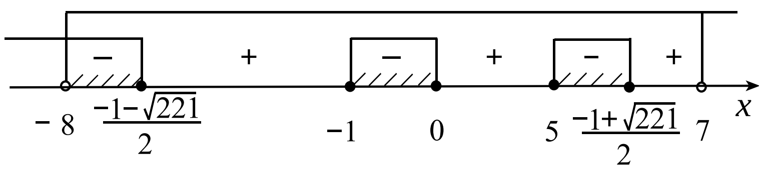
$$\left(56-x-x^2\right)^{x^3-2x^2} \geq \left(56-x-x^2\right)^{2x^2+5x}.$$

♦ ОДЗ: $56-x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2+x-56<0 \Leftrightarrow x\in(-8;7)$.

В ОДЗ, в силу (УР П6), $\left(56-x-x^2\right)^{x^3-2x^2} \geq \left(56-x-x^2\right)^{2x^2+5x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(55-x-x^2\right)\left(x^3-2x^2-2x^2-5x\right)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{-1-\sqrt{221}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{221}}{2}\right)x(x+5)(x-1)\leq 0 \Rightarrow$



Ответ: $\left(-8;\dfrac{-1-\sqrt{221}}{2}\right]\cup[-1;0]\cup\left[5;\dfrac{-1+\sqrt{221}}{2}\right]$. ♦