§5. Сложная экспонента. Уравнение вида $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим выражение $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Что это за функция, какова ее область определения?

По определению, полагают, для любого $c > 0, c \neq 1, a(x) > 0$

$$\boxed{a(x)^{b(x)} = c^{b(x)\log_c a(x)}} \qquad (01)$$

Рассмотрим уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

ОДЗ: $a(x) > 0$.

$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)}, a(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)}$, тогда

$10^{f(x)\lg a(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg a(x) = 0, \\ f(x) = g(x). \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$ Следовательно,

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{array}\right. \text{ в ОДЗ.}} \qquad \text{(УР ПЗ)}$$

или

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x) = 1, \\ \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.} \qquad \text{(УР ПЗ*)}$$

Замечание. Мы не решаем уравнение $(-2)^x = -8$, потому что $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$, где левая часть существует, а правая часть не определена (в уравнении нет ограничений для x, и оно может принимать рациональные значения!). Однако, мы решаем уравнение $(-2)^n = -8$, где ***заранее*** задано, что n – число целое (операции возведения в рациональную степень и натуральную степень разные! Вспомним, кстати, что $\sqrt[3]{-8} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$, т. к. левая часть существует, а правая – нет).

Пример 9. Решите уравнение $x^{x^2} = x^{-2-3x}$.

♦ ОДЗ: $x > 0$.

В ОДЗ $x^{x^2} = x^{-2-3x} \Leftrightarrow 10^{x^2 \lg x} = 10^{(-2-3x)\lg x} \Leftrightarrow \lg x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg x(x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Корни -1, -2 ***не входят в ОДЗ.*** Это, несмотря на то, что $(-1)^1=(-1)^1, (-2)^4=(-2)^4$.

Ответ: $\{1\}$. ♦

Пример 10. (МГУ, 1998, химфак.) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2\left(\sqrt{2}\right)^x$$

имеет единственное решение?

♦ Сначала упростим левую часть уравнения. Замечаем, что

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=\frac{2^x}{\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x}.$$

Пусть $t=\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x$, тогда уравнение примет вид:

$$t+\frac{2^x}{t}=2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow t^2-2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot t+2^x=\left(t-2^{\frac{x}{2}}\right)^2=0\Leftrightarrow t=2^{\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow$$ В силу (УР П3),

$$x\lg\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)=x\lg\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ \sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{2}.\end{array}\right.\qquad(*)$$

Мы видим, что при любом значении параметра a есть решение $x=0$, поэтому для единственности решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение совокупности не имело решений.

ОДЗ (*): $x^2-3ax+6\geq 0$.

Если $x^2-3ax+6>0$, то $\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}>\sqrt{2}$.

Если $x^2-3ax+6=0$, то $\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{2}$.

Заданное уравнение имеет единственное решение ($x=0$ является решением данного уравнения при любом a!), если уравнение

$x^2 - 3ax + 6 = 0$ не имеет решений, что имеет место тогда и только тогда, когда $9a^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. ♦

