§1. Введение

Напомним основные свойства показательной и логарифмической функций.

В школе принимается без доказательства, что для любых положительных чисел a и b и любых действительных чисел α и β справедливы свойства:

$$\text{С1. } a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}. \qquad \text{С2. } \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}.$$

$$\text{С3. } a^{\alpha}b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}. \qquad \text{С4. } \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}.$$

Если $a > 0,\ a \neq 1,$ то функция a^x отлична от постоянной. Ее называют показательной функцией с основанием a. Если $a > 1,$ то функция a^x – монотонно возрастающая на R; если $0 < a < 1,$ то функция a^x – монотонно убывающая на R. Область значений показательной функции – множество R_+ всех положительных чисел. Отсюда и из монотонности следует, что, если $a > 0, a \neq 1$, то для любого положительного числа N существует единственное число x, такое, что $a^x = N$. Это число называется логарифмом числа N по основанию a и обозначается $\log_a N$. Из определения следует, что

$$\boxed{a^{\log_a N} = N \text{ в ОДЗ}}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для $N > 0, a > 0, a \neq 1$).

В школе показывается, что, если $\underline{a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0}$, $\underline{\alpha}$ – любое действительное число, то верны формулы

С5. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$. С6. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

С7. $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$.

С8. Если, к тому же, $b > 0, b \neq 1$, то $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$.

Последняя формула позволяет переходить от логарифма по основанию a к логарифму по основанию b. Она называется формулой перехода к новому основанию.

Свойства 5 – 8 при вышеописанных условиях ($M > 0, N > 0$) являются тождествами и читаются как справа налево, так и слева направо.

Заметим, однако, что левые и правые части равенств в С5 и С6 имеют разные области определения: левая часть определена при $MN > 0$, а правая – при $M > 0, N > 0$. Это надо учитывать при решении задач: $MN > 0$ не только тогда, когда $M > 0, N > 0$, но и тогда, когда $M < 0, N < 0$. Учтем, что $MN = (-M)(-N)$, и для $-M > 0, -N > 0$ (в силу С5) $\log_a(-M)(-N) = \log_a(-M) + \log_a(-N)$.
Теперь запишем более общую формулу

С5*. Если $MN > 0$, то $\log_a MN = \log_a|M| + \log_a|N|$.

С9. Если $M \neq 0, N \neq 0$, то $\log_a|M| + \log_a|N| = \log_a|MN|$.

Аналогично показывается, что

С6*. Если $MN > 0$, то $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a|M| - \log_a|N|$.

С10. Если $M \neq 0, N \neq 0$, то $\log_a|M| - \log_a|N| = \log_a\left|\dfrac{M}{N}\right|$.

С7*. Если $M \neq 0$, то для любого натурального n верно, что $\log_a M^{2n} = 2n\log_a|M|$.

Все свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами), при выполнении приведенных для каждого из них условиях.