**Федеральное агентство по образованию**
**Федеральная заочная физико-техническая школа**
**при Московском физико – техническом институте**
**(государственном университете)**

**МАТЕМАТИКА**

**Системы уравнений**

Задание №3 для 8-х классов

(2008-2009 учебный год)

г. Долгопрудный, 2008

*Составитель*: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 8-х классов (2008-2009 учебный год). - М.: МФТИ, 2008, 16с.

Составитель:
**Яковлева Тамара Харитоновна**
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано18.11.08
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0
Уч.-изд. л. 0,88. Тираж 1700. Заказ №8-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

***E.mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: www.school.mipt.ru**

## § 1. Линейные уравнения с двумя переменными

В первом задании мы рассмотрели линейные уравнения с одной переменной. Например, уравнения $2x+5=0,\ 3x+(8x-1)+9=0$ являются линейными уравнениями с переменной $x$. Уравнение, содержащее переменные $x$ и $y$, называется уравнением с двумя переменными. Например, уравнения $2x-3y=5,\ \ x^2+xy-y^2=7$ являются уравнениями с двумя переменными.

Уравнение вида $ax+by=c$ называется линейным уравнением с двумя переменными, где $x$ и $y-$ переменные, $a, b, c-$ некоторые числа.

Например, уравнения $2x+y=3, x-y=0$ являются линейными уравнениями с двумя переменными.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Например $x=3,\ y=4$ является решением уравнения $2x+3y=18,$ будем эту пару чисел записывать так $(3;4).$ Очевидно, что пара чисел $(4;3)$ не является решением уравнения, т. к. $2\cdot4+3\cdot3=17\neq18.$ При нахождении решений с двумя переменными на первом месте в паре чисел пишем значение для переменной $x,$ а на втором месте – значение переменной $y.$

Если каждое решение одного уравнения является решением второго уравнения и обратно, то данные уравнения называются равносильными. Например, решения уравнений $2x+y=3$ и $4x+2y=6$ совпадают, следовательно, эти уравнения равносильные.

Справедливы следующие правила при решении уравнений с двумя переменными:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;
2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

**Пример 1.** Укажите три различных решения для уравнения

$$3x+y-2=0.$$

$\Delta$ Если $x=0,$ то $y=2;$ если $y=0,$ то $x=\dfrac{2}{3};$ если $x=1,$ то $y=-1.$

 

Таким образом, пары чисел $(0;2)$, $\left(\frac{2}{3};0\right)$, $(1;-1)$ являются решениями данного уравнения. Заметим, что данное уравнение имеет бесконечно много решений. Для заданного значения $x$ значение $y=2-3x$, т. е. любая пара чисел $(x;\ 2-3x)$, где $x-$ любое число, является решением уравнения. ▲

Рассмотрим координатную плоскость $Oxy$ и отметим на ней все точки $(x;y)$, для которых пара чисел $x$ и $y$ является решениями уравнения. Например, рассмотрим уравнение $y=2$. Этому уравнению удовлетворяют все пары чисел $(x;2)$. Точки, для которых $x-$ любое число, а $y=2$, лежат на прямой $y=2$. Эта прямая параллельна оси $x$ и проходит через точку $(0;2)$ (см. рис. 1).

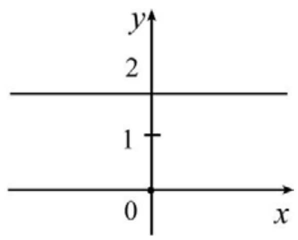


**Рис. 1**

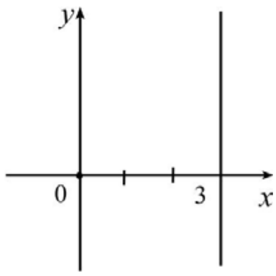


**Рис. 2**

Рассмотрим уравнение $x=3$. Каждая пара чисел, являющаяся решением данного уравнения, изображается точкой с координатами $x$ и $y$ на координатной плоскости $Oxy$. Решениями данного уравнения являются пары чисел $(3;y)$. Точки с координатами $x=3$ и $y$ лежат на прямой $x=3$, эта прямая параллельна оси $Oy$ и проходит через точку $(3;0)$ (см. рис. 2).

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного уравнения.

На рис. 1 графиком уравнения является прямая $y=2$, на рис. 2 графиком уравнения является прямая $x=3$.

Рассмотрим теперь уравнение $2x+3y-1=0$. Выразим переменную $y$ через $x$, получаем $y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$, это уравнение задаёт линейную функцию, и нам известно, что её графиком является прямая. Чтобы построить эту прямую, достаточно рассмотреть две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению, а затем через эти две точки провести прямую. При $x=0$ $y=\frac{1}{3}$ и при $x=\frac{1}{2}$, $y=0$. график данного уравнения приведён на рис. 3.

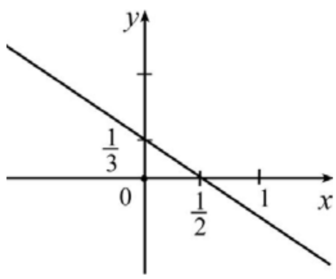


**Рис. 3**

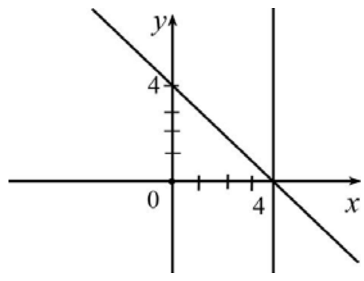


**Рис. 4**

Рассмотрим уравнение $(x-4)(x+y-4)=0$. Произведение двух скобок равно нулю, каждая скобка может равняться нулю. Наше уравнение распадётся на два уравнения: $x=4$ и $x+y-4=0$. Графиком первого уравнения является прямая, параллельная оси $Oy$ и проходящая через точку $(4;0)$. Графиком второго уравнения является график линейной функции $y=4-x$, эта прямая проходит через точки $(4;0)$ и $(0;4)$. График данного уравнения приведён на рис. 4.

**Пример 2.** Постройте график уравнения $|x|+|y|=1$.

$\Delta$ Этот пример можно решать двумя способами. Пусть $x\geq 0$ и $y\geq 0$, точки с такими координатами лежат в первой четверти. Получаем уравнение $x+y=1$, так как $|x|=x$ и $|y|=y$. Графиком данного уравнения является прямая, проходящая через точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$. Графику исходного уравнения принадлежат точки полученной прямой, лежащие в первой четверти, т. е. графику принадлежат точки отрезка $AB$, где $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

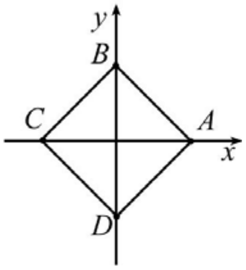


**Рис. 5**

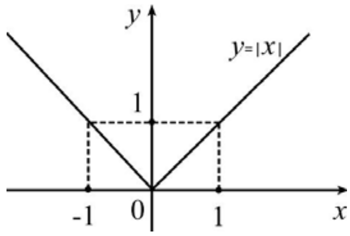


**Рис. 6**

Пусть теперь $x \le 0$ и $y \ge 0$, тогда получаем уравнение $-x + y = 1$, рассматриваем точки полученной прямой, лежащие во второй четверти. Это будет отрезок $BC$, где $C(-1;0)$. При $x \le 0$, $y \ge 0$ получим отрезок $CD$, где $D(0;-1)$ и при $x \ge 0$, $y < 0$ получим отрезок $DA$. Таким образом, график данного уравнения состоит из точек квадрата $ABCD$.

Этот пример можно решать другим способом. Пусть $y \ge 0$, тогда наше уравнение эквивалентно уравнению $y = 1 - |x|$. В первом задании мы строили график функции $y = |x|$. (см. рис. 6). График функции $y = -|x|$ получается зеркальным отражением относительно оси $Ox$ графика функции $y = |x|$. (см. рис. 7).

График функции $y = 1 - |x|$ получается из графика функции $y = -|x|$

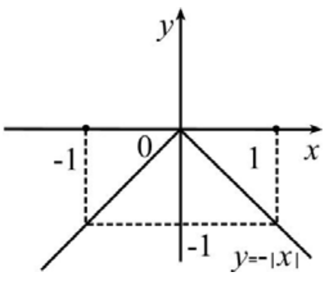


**Рис. 7**

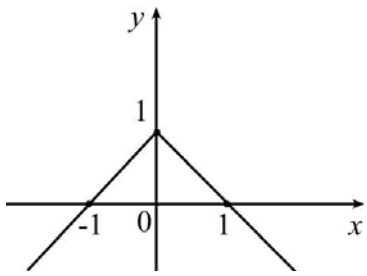


**Рис. 8**

сдвигом вдоль оси $Oy$ на единицу вверх. (см. рис. 8).

И у полученного графика рассматриваем только точки для которых $y \geq 0$. Получим ломаную $ABC$ с рис. 5. Далее рассматриваем $y \leq 0$, получим, что графиком уравнения при $y \leq 0$ является ломаная $CDA$ с рис. 5. В итоге получим квадрат $ABCD$ с рис. 5. ▲

**Пример 3.** Найдите все решения уравнения $xy = 6$, для которых $x$ и $y$ являются натуральными числами.

Δ Очевидно, что натуральные числа $x$ и $y$ являются делителями числа 6. Поэтому $x$ и $y$ могут принимать значения 1; 2; 3; 6. Следовательно, искомыми решениями являются числа (1;6), (2;3), (3;2), (6;1). ▲

**Пример 4.** Найти все решения уравнения $x^2 + 4x = y^2 + 2y + 8$, для которых значения $x$ и $y$ являются целыми числами.

Δ Обычно такие примеры формулируют так: найти все решения данного уравнения в целых числах.

Преобразуем данное уравнение: $x^2 + 4x + 4 - 4 = y^2 + 2y + 1 + 7$, $(x+2)^2 = (y+1)^2 + 11$, $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 11$, $(x+2-y-1)\cdot(x+2+y+1) = 11$. Если $x$ и $y$ целые числа, то выражения, стоящие в скобках, являются целыми числами. А это могут быть числа $\pm 1$ и $\pm 11$. Решаем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2-y-1=1, \\ x+2+y+1=11; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=11, \\ x+2+y+1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=-1, \\ x+2+y+1=-11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2-y-1=-11, \\ x+2+y+1=-1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем 4 решения: (4; 4), (4; – 6), (– 8; – 6), (– 8; 4).

## § 2. Системы линейных уравнений

Решение многих задач сводится к решению систем линейных уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение в верное числовое равенство.

Например, пара чисел (2;3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ x + 5y = 17, \end{cases}$$

а пара чисел (1;1) не является решением системы, т. к. эта пара не является решением каждого из уравнений системы.

**Пример 1.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2y+3x=8, \\ y-x=-1? \end{cases}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-\frac{3}{2}x+4$, а второе уравнение системы в виде $y=x-1$. Мы получили две линейные функции, где графиками являются прямые с разными угловыми коэффициентами. Вам известно, что такие прямые пересекаются в одной точке. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых приравняем значения для $y$, получаем $-\frac{3}{2}x+4=x-1$, $-\frac{3}{2}x-x=-4-1$, $-\frac{5}{2}x=-5$; $x=2$, тогда $y=2-1=1$. Таким образом, система имеет единственное решение (2;1). ▲

**Пример 2.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 4x+2y=10. \end{cases}$

Δ Из первого уравнения следует, что $y=5-2x$, а из второго уравнения получим $y=5-2x$. Графики этих уравнений совпадают. Уравнению удовлетворяет любая пара чисел, $(x,\ \ 5-2x)$, где $x$ любое число, а $y=5-2x$. Система уравнений имеет бесконечно много решений. ▲

**Пример 3.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=7, \\ 2x+2y=10. \end{cases}$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-x+7$, и второе уравнение системы в виде $y=-x+5$. Графиками этих уравнений являются две параллельные прямые, которые не пересекаются, т. к. $-x+7=-x+5$, $x\cdot 0=-2$. А это уравнение не имеет решений. ▲

При решении систем применяют метод подстановки, метод сложения и метод введения новых переменных.

Покажем на конкретном примере, как применяется метод подстановки.

**Пример 4.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 5x + 3y = 11. \end{cases}$$

Δ Из первого уравнения выражаем $y = 4 - 2x$, и это значение для $y$ подставляем во второе уравнение системы, получаем: $5x + 3(4 - 2x) = 11$; $5x + 12 - 6x = 11$, $-x = -1$, $x = 1$. Подставляем это значение $x$ в выражение для $y$, получаем: $y = 4 - 2 = 2$. Пара чисел (1;2) является единственным решением системы уравнений. ▲

Теперь приведём пример, где применяется метод сложения.

**Пример 5.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + 2y = 10. \end{cases}$

Δ В этих уравнениях коэффициенты при переменной $y$ отличаются знаком. Сложим уравнения системы, получаем $3x - 2y + 2x + 2y = 5 + 10$; $5x = 15$, $x = 3$. Подставляем найденные значения для $x$, например, в первое уравнение системы, получаем: $3 \cdot 3 - 2y = 5$, $-2y = -4$, $y = 2$. Система имеет единственное решение (3;2). ▲

**Пример 6.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = 11, \\ 3x + 7y = 13. \end{cases}$

Δ Уравняем коэффициенты при $x$ в обоих уравнениях, для этого умножим обе части первого уравнения на 3, и обе части второго уравнения на (– 4), получим систему: $\begin{cases} 12x + 9y = 33, \\ -12x - 28y = -52. \end{cases}$

Сложим уравнения системы: $12x + 9y - 12x - 28y = 33 - 52$. $-19y = -19$, $y = 1$. Подставляем это значение для $y$ в первое уравнение системы, получаем: $12x + 9 = 33$, $12x = 24$, $x = 2$. Пара чисел (2;1) является единственным решением системы. ▲

Покажем на конкретном примере, как применяется метод введения новых переменных.

 

**Пример 7.** Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{9}{3x+y}=2, \\ \dfrac{7}{2x-y}-\dfrac{18}{3x+y}=5. \end{cases}$

$\Delta$ Введём новые переменные: $u=\dfrac{1}{2x-y}, v=\dfrac{1}{3x+y}$. Для переменных $u$ и $v$ получили систему уравнений: $\begin{cases} u+9v=2, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$

Умножим обе части первого уравнения на 2, получим систему:

$$\begin{cases} 2u+18v=4, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы, получаем $9u=9, u=1,$ из первого уравнения при $u=1$ следует, что $v=\dfrac{1}{9}$.

Из условия $\dfrac{1}{2x-y}=1$ следует, что $2x-y=1,$ а из условия $\dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{1}{9}$ следует, что $3x+y=9$. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+y=9. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $5x=10,$ $x=2,$ из первого уравнения получаем $4-y=1, y=3.$

**Ответ:** $(2;3)$. ▲

## § 3. Решение систем с параметром и с модулями

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} ax+4y=2a, \\ x+ay=a. \end{cases}$

В этой системе, на самом деле, три переменные, а именно, $a, x, y$. Неизвестными считают $x$ и $y$, $a$ называют параметром. Требуется найти решения $(x, y)$ данной системы при каждом значении параметра $a$.

Покажем, как решают такие системы. Выразим переменную $x$ из второго уравнения системы: $x = a - ay$. Подставляем это значение для $x$ в первое уравнение системы, получаем: $a(a - ay) + 4y = 2a$, $(2-a)(2+a)y = a(2-a)$.

Если $a = 2$, то получаем уравнение $0 \cdot y = 0$, этому уравнению удовлетворяет любое число $y$, и тогда $x = 2 - 2y$, т. е. при $a = 2$ пара чисел $(2-2y; y)$ является решением системы.

Так как $y$ может быть любым числом, то система при $a = 2$ имеет бесконечно много решений.

Если $a = -2$, то получаем уравнение $0 \cdot y = 8$, это уравнение не имеет ни одного решения.

Если теперь $a \neq \pm 2$, то $y = \dfrac{a(2-a)}{(2-a)(2+a)} = \dfrac{a}{2+a}$,

$x = a - ay = a - \dfrac{a^2}{2+a} = \dfrac{2}{2+a}$.

**Ответ:** При $a = 2$ система имеет бесконечно много решений вида $(2-2y; y)$, где $y-$ любое число;

при $a = -2$ система не имеет решений;

при $a \neq \pm 2$, система имеет единственное решение $\left(\dfrac{2}{2+a}; \dfrac{a}{2+a}\right)$.

Мы решили эту систему и установили, при каких значениях параметра $a$ система имеет одно решение, когда имеет бесконечно много решений и при каких значениях параметра $a$ она не имеет решений.

**Пример 1.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2|x| - 3|y-1| = 3, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

$\Delta$ Из второго уравнения системы выражаем $x$ через $y$, получаем $x = \dfrac{2y+5}{3}$, подставляем это значение для $x$ в первое уравнение системы, получаем: $\dfrac{2}{3}|2y+5| - 3|y-1| = 3$; $\dfrac{4}{3}\left|y + \dfrac{5}{2}\right| - 3|y-1| = 3$. Выражение $y+\frac{5}{2}=0$ при $y=-\frac{5}{2}$. Если $y>-\frac{5}{2}$, то $\left|y+\frac{5}{2}\right|=y+\frac{5}{2}$, если $y<-\frac{5}{2}$, то $\left|y+\frac{5}{2}\right|=-y-\frac{5}{2}$.

Выражение $y-1=0$, если $y=1$. Если $y>1$, то $|y-1|=y-1$, а если $y<1$, то $|y-1|=1-y$.


Если $y\geq 1$, то $|y-1|=y-1$ и $\left|y+\frac{5}{2}\right|=y+\frac{5}{2}$, мы получаем уравнение: $\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)-3(y-1)=3$, $\frac{4}{3}y+\frac{10}{3}=3y+3=3$; $-\frac{5}{3}y=-\frac{10}{3}$, $y=2$, тогда $x=\frac{1}{3}(2\cdot 2+5)=3$. Число $2>1$, так что пара (3;2) является решением системы.

Пусть теперь $-\frac{5}{2}\leq y<1$, тогда $|y-1|=1-y$; $\left|y+\frac{5}{2}\right|=y+\frac{5}{2}$. Для нахождения $y$ получаем уравнение $\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3y-3=3$, $\frac{4}{3}y+\frac{10}{3}+3y=6$; $\frac{13}{3}y=\frac{8}{3}$, $y=\frac{8}{13}$; $x=\frac{1}{3}(2y+5)=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{13}+5\right)=\frac{27}{13}$.

Число $\frac{8}{15}$ больше $\left(-\frac{5}{2}\right)$, но меньше, чем 1, поэтому пара чисел $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$ является решением системы.

Если $y<-\frac{5}{2}$, то получаем уравнение: $-\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3y-3=3$, $-\frac{4}{3}y-\frac{10}{3}+3y=6$; $\frac{5}{3}y=\frac{28}{3}$, $y=\frac{28}{5}$. Это значение больше, чем $\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Таким образом, система имеет два решения (3;2) и $\left(\dfrac{27}{13};\dfrac{8}{13}\right)$. ▲

## § 4. Решение задач с помощью систем уравнений

**Пример 1.** Путь от города до посёлка автомобиль проезжает за 2,5 часа. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 часа он пройдёт путь на 15 км больший, чем расстояние от города до посёлка. Найдите это расстояние.

Δ Обозначим через $S$ расстояние между городом и посёлком и через $V$ скорость автомобиля. Тогда для нахождения $S$ получаем систему из двух уравнений: $\begin{cases} 2{,}5V = S, \\ (V+20)2 = S+15. \end{cases}$

Из первого уравнения $V = \dfrac{S}{2{,}5} = \dfrac{2}{5}S$, подставляем это значение $V$ во второе уравнение, имеем: $\left(\dfrac{2}{5}S + 20\right)2 = S + 15,\ \dfrac{1}{5}S = 25,\ S = 125.$

**Ответ:** 125 км. ▲

**Пример 2.** Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если эти цифры поменять местами, то получится число, которое на 27 больше исходного. Найдите эти числа.

Δ Пусть данное число $\overline{ab}$, т. е. число десятков равно $a$, а число единиц равно $b$. Из первого условия задачи имеем: $a + b = 15$. Если из числа $\overline{ab}$ вычесть число $\overline{ba}$, то получится 27, отсюда получаем второе уравнение: $10a + b - (10b + a) = 27$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} a+b=15, \\ 9a-9b=27, \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=15, \\ a-9=3. \end{cases}$

Сложим уравнения последней системы, получаем: $2a = 18$, $a = 9$, тогда $b = 6$. Заданное число 96, второе число 69.

**Ответ:** 96 и 69. ▲

**Пример 3.** Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получилось 140 т стали с содержанием никеля 30%?

 

ΔОбозначим через $x$ массу стали с 5% содержанием никеля и через $y$ массу стали с 40% содержанием никеля. Тогда $x+y=140$. В $x$ тоннах стали содержится $0,05x$ никеля, а в $y$ тоннах стали содержится $0,4y$ никеля, масса никеля $0,05x+0,4y$ и это составляет 30% от 140 т, тогда $\frac{3}{10}140$ т $=42$ т. Получили второе уравнение $0,05x+0,4y=42$; умножим обе части уравнения на 20, получим: $x+8y=840$. Для нахождения $x$ и $y$ получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=140, \\ x+8y=840. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое уравнение, получим: $7y=700$, $y=100$, тогда $x=40$.

**Ответ:** 40 т, 100 т. ▲

### Контрольные вопросы

**1(1).** Укажите какие-нибудь три решения уравнения $5x-7y=8$.

**2(4).** Постройте графики уравнений: а) $x=2$; б) $2x-4y+5=0$; в) $(y-1)(x+2y+1)=0$.

**3(2).** Постройте график уравнения $y=|x|-3$.

**4(4).** Сколько решений имеет система уравнений

а) $\begin{cases} 5x+6y=13, \\ 10x+12y=20, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x-8y=10, \\ 21x-24y=30, \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-4y=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

**5(2).** Решите данную систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=3, \\ 2x+3y=34. \end{cases}$$

**6(2).** Решите систему, применяя метод сложения уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=3,5, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$$

 

**7(1).** Решите систему уравнений графическим методом: $\begin{cases} x + y = 4, \\ 4x - y = 1. \end{cases}$

**8(4).** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2|x-2| + 3|y| = 7, \\ 3x - 2y = 10. \end{cases}$

**9(4).** Решите систему для всех значений параметра $a$: $\begin{cases} 2x - ay = 4a, \\ 9ax + 2y = a. \end{cases}$

**10(3).** График линейной функции пересекает ось $x$ в точке с абсциссой 7, а ось $y$ с ординатой 9. Задайте эту функцию формулой.

**11(2).** Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{7}{3x+2y} - \dfrac{3}{x-y} = 4, \\ \dfrac{14}{3x+2y} - \dfrac{5}{x-y} = 7. \end{cases}$

**Задачи**

Постройте графики уравнений (1 – 2):

**1(2).** $(y-1)(x+2)(x-y+3) = 0.$

**2(3).** $y = 1 - |x-2|.$

**3(4).** Решите уравнение $(x-3)(xy+5) = 5$ в целых числах.

**4(3).** Решите уравнение $15x + 19y = 200$ в натуральных числах.

Решите систему уравнений (5 – 6):

**5(3).** $\begin{cases} 2x + 3y = 18, \\ |x - y| = 1. \end{cases}$

**6(2).** $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3x+4y} = \dfrac{5}{11}, \\ \dfrac{3x-4y}{x-5} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

**7(4).** Решите систему для всех значений параметра $a$:
$$\begin{cases} 5x - ay = a - 4, \\ ax - 5y = 2a - 9. \end{cases}$$

**8(4).** Если данное двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получается 7 и в остатке 9. Если же данное число разделить на разность числа десятков и числа единиц, то в частном получится 15 и в остатке 3. Найти это число.

**9(4).** В двух сосудах содержатся растворы кислоты; в первом сосуде 70 % - ный, во втором – 46 % - ный. Из первого сосуда 1 л раствора перелили во второй, и жидкость во втором сосуде перемешали. Затем из второго сосуда 1 л раствора перелили в первый и также перемешали. После этого концентрация кислоты в первом сосуде стала равна 68 %. Сколько жидкости было во втором сосуде, если известно, что в первом было 10 л.?

**10(4).** Два фрезеровщика, один из которых работал 5 дней, а другой – 8 дней, изготовили 280 деталей. Затем, применив новую фрезу, первый повысил производительность на 62,5 %, а второй на 50 %, и уже за 4 дня совместной работы они изготовили 276 деталей. Сколько деталей изготовили бы они с новой фрезой, если бы, как и раньше, первый работал 5 дней, а второй 8 дней?

**11(3).** Из пункта $A$ в пункт $B$ автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населённых пунктов со скоростью $60\,\text{км}/\text{ч}$, а по шоссе вне населённых пунктов – со скоростью $80\,\text{км}/\text{ч}$. Обратный путь из $B$ в $A$ занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населённых пунктов автомобиль двигался со скоростью $50\,\text{км}/\text{ч}$, а по шоссе – $90\,\text{км}/\text{ч}$. Каково расстояние между $A$ и $B$?

**12(3).** (Задача предлагалась на вступительных экзаменах в МГУ на филологическом факультете в 2006 г.)

На вступительном экзамене по математике 15 % поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число остальных абитуриентов, верно решивших все задачи, относится к числу не решивших ничего, как 5:3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

**13(5).** При каких значениях параметра $b$ система $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b. \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра $a$?

 