§ 3. Решение систем с параметром и с модулями

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} ax+4y=2a, \\ x+ay=a. \end{cases}$

В этой системе, на самом деле, три переменные, а именно, a, x, y. Неизвестными считают x и y, a называют параметром. Требуется найти решения (x, y) данной системы при каждом значении параметра a.

Покажем, как решают такие системы. Выразим переменную x из второго уравнения системы: $x = a - ay$. Подставляем это значение для x в первое уравнение системы, получаем: $a(a - ay) + 4y = 2a$, $(2-a)(2+a)y = a(2-a)$.

Если $a = 2$, то получаем уравнение $0 \cdot y = 0$, этому уравнению удовлетворяет любое число y, и тогда $x = 2 - 2y$, т. е. при $a = 2$ пара чисел $(2-2y; y)$ является решением системы.

Так как y может быть любым числом, то система при $a = 2$ имеет бесконечно много решений.

Если $a = -2$, то получаем уравнение $0 \cdot y = 8$, это уравнение не имеет ни одного решения.

Если теперь $a \neq \pm 2$, то $y = \dfrac{a(2-a)}{(2-a)(2+a)} = \dfrac{a}{2+a}$,

$x = a - ay = a - \dfrac{a^2}{2+a} = \dfrac{2}{2+a}$.

Ответ: При $a = 2$ система имеет бесконечно много решений вида $(2-2y; y)$, где $y-$ любое число;

при $a = -2$ система не имеет решений;

при $a \neq \pm 2$, система имеет единственное решение $\left(\dfrac{2}{2+a}; \dfrac{a}{2+a}\right)$.

Мы решили эту систему и установили, при каких значениях параметра a система имеет одно решение, когда имеет бесконечно много решений и при каких значениях параметра a она не имеет решений.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2|x| - 3|y-1| = 3, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

Δ Из второго уравнения системы выражаем x через y, получаем $x = \dfrac{2y+5}{3}$, подставляем это значение для x в первое уравнение системы, получаем: $\dfrac{2}{3}|2y+5| - 3|y-1| = 3$; $\dfrac{4}{3}\left|y + \dfrac{5}{2}\right| - 3|y-1| = 3$. Выражение $y+\frac{5}{2}=0$ при $y=-\frac{5}{2}$. Если $y>-\frac{5}{2}$, то $\left|y+\frac{5}{2}\right|=y+\frac{5}{2}$, если $y<-\frac{5}{2}$, то $\left|y+\frac{5}{2}\right|=-y-\frac{5}{2}$.

Выражение $y-1=0$, если $y=1$. Если $y>1$, то $|y-1|=y-1$, а если $y<1$, то $|y-1|=1-y$.

Если $y\ge 1$, то $|y-1|=y-1$ и $\left|y+\frac{5}{2}\right|=y+\frac{5}{2}$, мы получаем уравнение: $\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)-3(y-1)=3$, $\frac{4}{3}y+\frac{10}{3}=3y+3=3$; $-\frac{5}{3}y=-\frac{10}{3}$, $y=2$, тогда $x=\frac{1}{3}(2\cdot 2+5)=3$. Число $2>1$, так что пара (3;2) является решением системы.

Пусть теперь $-\frac{5}{2}\le y<1$, тогда $|y-1|=1-y$; $\left|y+\frac{5}{2}\right|=y+\frac{5}{2}$. Для нахождения y получаем уравнение $\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3y-3=3$, $\frac{4}{3}y+\frac{10}{3}+3y=6$; $\frac{13}{3}y=\frac{8}{3}$, $y=\frac{8}{13}$; $x=\frac{1}{3}(2y+5)=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{13}+5\right)=\frac{27}{13}$.

Число $\frac{8}{15}$ больше $\left(-\frac{5}{2}\right)$, но меньше, чем 1, поэтому пара чисел $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$ является решением системы.

Если $y<-\frac{5}{2}$, то получаем уравнение: $-\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3y-3=3$, $-\frac{4}{3}y-\frac{10}{3}+3y=6$; $\frac{5}{3}y=\frac{28}{3}$, $y=\frac{28}{5}$. Это значение больше, чем $\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Таким образом, система имеет два решения (3;2) и $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$. ▲