§ 2. Системы линейных уравнений

Решение многих задач сводится к решению систем линейных уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение в верное числовое равенство.

Например, пара чисел (2;3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ x+5y=17, \end{cases}$$

а пара чисел (1;1) не является решением системы, т. к. эта пара не является решением каждого из уравнений системы.

Пример 1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2y+3x=8, \\ y-x=-1? \end{cases}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-\frac{3}{2}x+4$, а второе уравнение системы в виде $y=x-1$. Мы получили две линейные функции, где графиками являются прямые с разными угловыми коэффициентами. Вам известно, что такие прямые пересекаются в одной точке. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых приравняем значения для y, получаем $-\frac{3}{2}x+4=x-1$, $-\frac{3}{2}x-x=-4-1$, $-\frac{5}{2}x=-5$; $x=2$, тогда $y=2-1=1$. Таким образом, система имеет единственное решение (2;1). ▲

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 4x+2y=10. \end{cases}$

Δ Из первого уравнения следует, что $y=5-2x$, а из второго уравнения получим $y=5-2x$. Графики этих уравнений совпадают. Уравнению удовлетворяет любая пара чисел, $(x,\ \ 5-2x)$, где x любое число, а $y=5-2x$. Система уравнений имеет бесконечно много решений. ▲

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=7, \\ 2x+2y=10. \end{cases}$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-x+7$, и второе уравнение системы в виде $y=-x+5$. Графиками этих уравнений являются две параллельные прямые, которые не пересекаются, т. к. $-x+7=-x+5$, $x\cdot 0=-2$. А это уравнение не имеет решений. ▲

При решении систем применяют метод подстановки, метод сложения и метод введения новых переменных.

Покажем на конкретном примере, как применяется метод подстановки.

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 5x+3y=11. \end{cases}$$

Δ Из первого уравнения выражаем $y=4-2x$, и это значение для y подставляем во второе уравнение системы, получаем: $5x+3(4-2x)=11;\quad 5x+12-6x=11,\quad -x=-1,\quad x=1$. Подставляем это значение x в выражение для y, получаем: $y=4-2=2$. Пара чисел (1;2) является единственным решением системы уравнений. ▲

Теперь приведём пример, где применяется метод сложения.

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 2x+2y=10. \end{cases}$

Δ В этих уравнениях коэффициенты при переменной y отличаются знаком. Сложим уравнения системы, получаем $3x-2y+2x+2y=5+10;\quad 5x=15,\quad x=3$. Подставляем найденные значения для x, например, в первое уравнение системы, получаем: $3\cdot 3-2y=5,\quad -2y=-4,\quad y=2$. Система имеет единственное решение (3;2). ▲

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x+3y=11, \\ 3x+7y=13. \end{cases}$

Δ Уравняем коэффициенты при x в обоих уравнениях, для этого умножим обе части первого уравнения на 3, и обе части второго уравнения на (– 4), получим систему: $\begin{cases} 12x+9y=33, \\ -12x-28y=-52. \end{cases}$

Сложим уравнения системы: $12x+9y-12x-28y=33-52$. $-19y=-19,\quad y=1$. Подставляем это значение для y в первое уравнение системы, получаем: $12x+9=33,\quad 12x=24,\quad x=2$. Пара чисел (2;1) является единственным решением системы. ▲

Покажем на конкретном примере, как применяется метод введения новых переменных.

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{9}{3x+y}=2, \\ \dfrac{7}{2x-y}-\dfrac{18}{3x+y}=5. \end{cases}$

Δ Введём новые переменные: $u=\dfrac{1}{2x-y}, v=\dfrac{1}{3x+y}$. Для переменных u и v получили систему уравнений: $\begin{cases} u+9v=2, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$

Умножим обе части первого уравнения на 2, получим систему:

$$\begin{cases} 2u+18v=4, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы, получаем $9u=9, u=1,$ из первого уравнения при $u=1$ следует, что $v=\dfrac{1}{9}.$

Из условия $\dfrac{1}{2x-y}=1$ следует, что $2x-y=1,$ а из условия $\dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{1}{9}$ следует, что $3x+y=9.$ Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+y=9. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $5x=10,$ $x=2,$ из первого уравнения получаем $4-y=1, y=3.$

Ответ: $(2;3)$. ▲