§5. Системы тригонометрических уравнений

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением нескольких типов систем тригонометрических уравнений с двумя переменными x и y, опишем возможные способы их решения и разберем на примерах наиболее интересные из них.

5.1. Простейшие и сводящиеся к простейшим системы

Пример 21. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 2\sin x \sin y, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. После подстановки $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ в первое уравнение получаем:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin x \sin(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$-\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 2\sin x \cos x,$$

$$-\cos 2x = \sin 2x,$$

$$\mathrm{tg} 2x = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \; y = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

Пример 22. Решить систему: $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Преобразуем систему, складывая и вычитая уравнения друг из друга. Это эквивалентное преобразование и, применяя формулы синуса суммы и синуса разности, получим:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y) = 0, \\ \cos x \sin y - \sin x \cos y = \sin(y-x) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi(\dfrac{n}{2} - k - \dfrac{1}{4}), \quad y = \pi(\dfrac{n}{2} + k + \dfrac{1}{4})$.

Пример 23. Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$$

Решение. Почленно возводя уравнения системы в квадрат и складывая, получаем уравнение – следствие системы:

$$2 = 1 + 2\cos y + \cos^2 y + \sin^2 y,$$

$$\cos y = 0, y = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Заметим, что преобразование было неравносильное, поэтому подставляем полученные значения y в оба уравнения исходной системы (при этом удобно разбить на два случая):

1. Если n – чётное, $n = 2k$, то

$$\begin{cases}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

2. Если же n – нечётное, $n = 2k + 1$, то

$$\begin{cases}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)\ l, k \in Z\right\}.$

5.2. Сведение тригонометрической системы к алгебраической

Пример 24. Решить систему: $\begin{cases}\sin x + \cos y = 1,\\ \cos 2x - \cos 2y = 1.\end{cases}$

Решение. Заметим, что данная система легко преобразуется к указанному типу систем, действительно, т.к. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1,$ то произведём замену $u = \sin x,$ $v = \cos y$ и получим:

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^2+v^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-u, \\ u^2+1-2u+u^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{1}{2}, \\ u=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y=\dfrac{1}{2}, \\ \sin x=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ \ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Ответ: $\left((-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m, \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\quad m, n \in \mathrm{Z}.$

5.3. Разложение одного из уравнений системы на множители

Пример 25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\cos 2y=\left(\sin y-\dfrac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x), \\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y. \end{cases}$$

Решение. Из равенства

$$\frac{1}{2}-\cos 2y=\frac{1}{2}-(1-2\sin^2 y)=\frac{1}{2}(4\sin^2 y-1)=\frac{1}{2}(2\sin y-1)(2\sin y+1)$$

следует, что первое уравнение системы допускает разложение на множители: $(2\sin y-1)(\sin y-\sin 2x)=0.$

Таким образом, система распадается на две:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 2\sin y-1=0, \\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y, \end{cases} \quad \text{и} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} \sin y-\sin 2x=0, \\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y. \end{cases}$$

Для (I) имеем:

$$\sin y=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 y=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{1}{3}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=2.$$

Положив $t=\mathrm{tg}^2 x$, получаем $t+\dfrac{1}{t}=2, t=1, \mathrm{tg}x=\pm 1$.

Для (II) имеем: $\sin y = \sin 2x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}.$

Кроме того,

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}.$$

Обозначив $t = \sin^2 2x,$ получаем $\dfrac{1-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{4}t} = \dfrac{6t}{1-t},$ $t = -2,$ $t = \dfrac{1}{2},$ т.е.

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2},\ \sin 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}.$$

Тогда $\sin y = \sin 2x = \sin(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}).$

Для удобства разобьем множество значений величины $2x$ на два:

$$2x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \text{ тогда } \sin y = \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и}$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \text{ тогда } \sin y = \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;$

$x = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{8} + \pi m,\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k;$

$x = -\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{8} + \pi m,\ y = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{4} + \pi k.$

5.4. Решение системы тригонометрических уравнений методом подстановки

Пример 26. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если $\sin x = 0$, то из второго уравнения $\cos x = 0$, что невозможно. Значит, $\sin x \neq 0$. Выразив из второго уравнения $\cos y$, подставим в первое:

$$\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x}},\ 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\left(2\frac{\cos^2 x}{3\sin x} - 1\right),$$

$$17\cos 2x - 7 = 14\cos^2 x - 21\sin x.$$

Сделаем подстановку $t = \sin x : 17(1-2t^2) - 7 = 14(1-t^2) - 21t,$ откуда $t = \frac{1}{4},\ t = \frac{4}{5}.$

Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{4}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \frac{4}{5}, \\ \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{5}}\cos y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для первой системы $\cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, что невозможно.

Для второй $\cos x = \pm\frac{3}{5}$, $\cos y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, т.е. $x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n,$

$y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi m.$

Отметим, что:

1) правильный выбор целочисленных параметров, нумерующих решения простейших тригонометрических уравнений в системах, требует внимательности и аккуратности. Так, запись

$$x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n, \quad y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n$$

немедленно ведёт к потере бесконечного числа решений, например, решений

$$x = \arccos\frac{3}{5}, \quad y = \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n, \quad n \neq 0;$$

2) равенство $\cos x = \pm\frac{3}{5}$ даёт $\sin x = \pm\frac{4}{5}$, поэтому при нахождении корней необходимо учитывать первое уравнение системы: $\sin x = \frac{4}{5}$. Значит, $x = (-1)^k \arcsin\frac{4}{5} + \pi k$;

3) полученные формулы, задающие значения y, нельзя сразу включать в ответ, т.к. согласно второму уравнению системы знаки $\cos x$ и $\cos y$ должны совпадать. Значит, при $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, а при $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$, $y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m;$

$$x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k, \quad y = \pi + \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m.$$