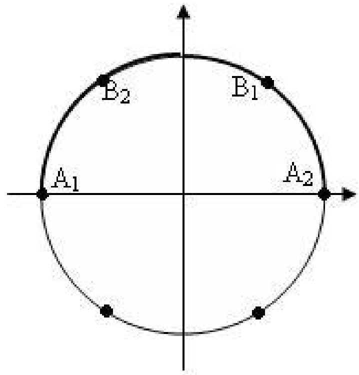
## §4. Иррациональные уравнения

**Пример 20.** Решить уравнение $\sqrt{1-\cos 4x} = \sin x$

**Решение.** 1 способ. Уравнение $\sqrt{A(x)} = B(x)$, как известно из курса алгебры, равносильно системе $\begin{cases} A(x) = B^2(x), \\ B(x) \geq 0, \end{cases}$ поэтому из корней, которые мы получаем после возведения в квадрат, необходимо отобрать те, для которых $\underline{\sin x \geq 0}$. Имеем

$$1 - \cos 4x = \sin^2 x, \text{ т.е.}$$




$$1 - \cos 4x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$1 - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$4\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0.$$

Положив $t = \cos 2x$, получаем

$4t^2 - t - 3 = 0$, откуда

$\cos 2x = 1, x = \pi n$ или $\cos 2x = -\frac{3}{4}$,

Отсюда следует

$$2x = \pm\arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n.$$

Производим отбор корней. Отметив полученные корни на тригонометрическом круге, увидим, что неравенству $\sin x \geq 0$ (выделенная дуга) удовлетворяют те решения, которые соответствуют точкам $A_1, B_1, A_2, B_2$.

Можно производить отбор иначе. Преобразуем уравнение $\cos 2x = -\frac{3}{4}$ к виду $1 - 2\sin^2 x = -\frac{3}{4}$, тогда $\sin^2 x = \frac{7}{8}$. По условию $\sin x \geq 0$, значит $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$ и $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} + \pi n$. Серия решений $x = \pi n$ также удовлетворяет условию $\sin x \geq 0$.

**Ответ:** $x=\pi n, \quad x=\left(-1\right)^n \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}+\pi n.$

<u>2 способ.</u> В данном уравнении естественным является применение формулы $\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. К сожалению, такая запись тождества $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ часто приводит к путанице и непониманию, порождает представление о некой «двузначности» синуса (косинуса) поло винного аргумента. В действительности она означает, что если $\sin\alpha\ge 0$, то $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, а если $\sin\alpha<0$, то $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Другими словами, $|\sin\alpha|=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Таким образом, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{2}\,|\sin 2x|=\sin x$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому $\sin x\ge 0$, и, значит, $\sin x$ можно вывести из-под знака модуля:

$$2\sqrt{2}\sin x\,|\cos x|=\sin x,$$

$$\sin x(2\sqrt{2}\,|\cos x|-1)=0 \quad \left(\sin x\ge 0\right).$$

Следовательно, $\sin x=0, x=\pi n$ или

$$|\cos x|=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \cos x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, x=\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n.$$

С помощью тригонометрического круга устанавливаем, что неравенству $\sin x\ge 0$ удовлетворяют корни

$$x=\pi n,\ x=\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m,\ x=\pi-\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m.$$

**Ответ:** $\pi n$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m$ (иначе: $\pi n$ и $(-1)^n \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}+\pi n$) или $x = \pi n$, $x = \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m$, $x = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m$.