§3. Методы решений некоторых уравнений

3.1. Уравнение вида $\sin kx \pm \cos mx = 0$

Также уравнения решаются сведением к одной функции, т.е. к виду

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - kx\right) \pm \cos mx = 0$ или $\sin kx \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm mx\right) = 0,$ и применением формул, преобразующих сумму (разность) косинусов или сумму (разность) синусов в произведение.

Пример 7. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0.$

Решение. По формуле перехода $\sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$, уравнение примет вид $\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) = 0.$

По формуле $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ получаем

$$2\cos(\frac{\pi}{4} - x)\cos(4x - \frac{\pi}{4}) = 0,$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0, \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

и $$\cos(4x - \frac{\pi}{4}) = 0, \quad 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}.$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \; x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}.$

3.2. Решение уравнений вида $F\left(\sin x + \cos x;\ \sin x \cdot \cos x\right) = 0$ и $\Phi\left(\sin x - \cos x;\ \sin x \cdot \cos x\right) = 0$

Оба уравнения сводятся к алгебраическим уравнениям заменой. Полагая $t = \sin x + \cos x$ из тождества

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$$

получаем $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, тогда первое уравнение запишется в виде $F\left(t; \dfrac{t^2-1}{2}\right) = 0.$

Во втором уравнении делаем замену $y = \sin x - \cos x$, тогда $\sin x \cos x = \dfrac{1-y^2}{2}$ и $\Phi\left(y, \dfrac{1-y^2}{2}\right) = 0$. Следует иметь в виду, что

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

поэтому допустимые значения t и y таковы $|t| \le \sqrt{2}$ и $|y| \le \sqrt{2}$.

Пример 8. Решить уравнение $2\sin 2x - 5\cos x - 5\sin x + 5 = 0$.

Решение. Заменой $t = \cos x + \sin x$ (тогда $\sin 2x = t^2 - 1$) приводится к виду $2t^2 - 5t + 3 = 0$, его корни $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{3}{2}$.

Если $\cos x + \sin x = 1$, то $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; то по формуле $(2')$

$$x + \frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \qquad x = \left[\begin{array}{l} 2\pi n, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Уравнение $\cos x + \sin x = \dfrac{3}{2}$ не имеет решений, т.к.

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ а } \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1.$$

Ответ: $x = 2\pi n$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n.$

3.3. Замена $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Через t несложно выражаются $\sin x$ и $\cos x$:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Такая замена может быть применена, если, например, *левая часть тригонометрического уравнения* $F(x) = 0$ *выражается через* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ *или является рациональной функцией от* $\sin x$ *и* $\cos x$*, т.е. представляется в виде* $\dfrac{P}{Q}$*, где P и Q – некоторые многочлены от* $\sin x$ *и* $\cos x$ (*например,* $\dfrac{\sin^2 x + 3\cos x}{\cos 3x + \sin 2x} = \dfrac{1}{2}$; $\cos 3x$ *и* $\sin 2x$ *выражаются через* $\sin x$ *и* $\cos x$ *по известным формулам*).

Следует помнить, что функция $\operatorname{tg} x$ определена только при $\cos x \neq 0$, т.е. перед проведением замены $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ необходимо проверить, не являются ли значения $x = \pi(2n+1)$ (решения уравнения $\cos\dfrac{x}{2} = 0$) корнями исходного уравнения.

Пример 9. Решить уравнение $\sin x + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$.

Решение. Заметим, что $\cos\dfrac{x}{2} = 0$ не удовлетворяет уравнению. Поэтому можно сделать замену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. При этом $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{t}$. После замены, выполняя равносильные преобразования при $t \neq 0$, получаем:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2,$$

$$2t^2 + 1 + t^2 = 2t^3 + 2t,$$

$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0,$$

$$2(t^3 - t^2) - (t^2 - t) + (t - 1) = 0,$$

$$(t-1)(2t^2 - t + 1) = 0.$$

Поскольку уравнение $2t^2 - t + 1 = 0$ не имеет действительных корней, то исходное уравнение сводится к уравнению $t = 1$, или $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1$, откуда

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Использование замены $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ нередко приводит к трудной задаче нахождения корней многочлена. Поэтому использование данной замены целесообразно только в случае, когда нет других путей решения.

Часто, используя замену, учащиеся забывают, что требовалось-то найти x, а не t, и не указывают правильного ответа. Такая небольшая, казалось бы, ошибка может на вступительных экзаменах свести на нет всё решение.

3.4. Метод разложения на множители

Метод разложения на множители широко известен из других областей математики и фактически состоит в том, что громоздкое уравнение с помощью тождественных преобразований сводится к совокупности нескольких более простых уравнений вида $F(x) = 0$. Применение этого метода в тригонометрии удобнее всего рассмотреть на нескольких примерах.

Пример 10. Решить уравнение $2\sin x\cos 2x - 3 + 6\cos 2x - \sin x = 0$.

Решение. Вынося общий множитель первого и третьего слагаемых, получаем: $2\cos 2x(\sin x + 3) - (\sin x + 3) = 0$,

или $(2\cos 2x - 1)(\sin x + 3) = 0$.

Так как левая часть этого уравнения определена при всех x, то исходное уравнение распадается на следующие два:

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos 2x - 1 = 0, \\ \sin x + 3 = 0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение не имеет решений, а из первого уравнения следует

$$\cos 2x = \frac{1}{2},\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n.$

Пример 11. Решить уравнение $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$.

Решение. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

или $(\cos x - \sin x)\left[1 + \cos x\sin x - (\cos x + \sin x)\right] = 0$, и распадается

на два уравнения: $\left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0, \\ 1 - (\cos x + \sin x) + \cos x\sin x = 0. \end{array}\right.$

Первое уравнение имеет решение $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Второе заменой $\cos x+\sin x=t$, (при этом $\cos x\sin x=\frac{t^2-1}{2}$) (см. §3.2.) сводится к уравнению

$$1-t+\frac{t^2-1}{2}=0,$$
$$t^2-2t+1=0,$$
$$(t-1)^2=0,\ t=1.$$

Отсюда $\cos x-\sin x=1,\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\left[\begin{array}{l}2\pi n,\\ \frac{\pi}{2}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Пример 12. Решить уравнение $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x.$

Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 12x+\sin 6x).$$

Отсюда получаем $\sin 12x+\sin 4x=0$, и, применяя формулу суммы синусов, получаем: $2\sin 8x\cos 4x=0,\quad \sin 8x=0,\ 8x=\pi n,$ либо $\cos 4x=0,\quad 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$ Обе серии корней можно объединить в одну

Ответ: $x=\frac{\pi n}{8}$.

Пример 13. Доказать, что уравнение $\sin 5x\sin 7x=1$ не имеет решений**.**

Доказательство. $2\sin 5x\sin 7x=2,$

$$\cos 2x - \cos 12x = 2$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 12x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\pi k, \\ 12x = \pi + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$12x = 12\pi k = \pi + 2\pi m,$$

$$12k \neq 1 + 2m. \quad x \in \varnothing.$$

3.5. Метод введения дополнительного аргумента

Метод введения вспомогательного аргумента уже использовался нами в виде $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Также часто в школьных примерах используются тождества вида

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Теперь же разберём более общий случай.

Рассмотрим решение уравнений вида

$$a\cos x + b\sin x = c, \qquad (5)$$

где *a,b,c* – действительные числа, причём $c \neq 0$ (иначе уравнение становится однородным и решается проще – см. пример 1*г*) и $a^2 + b^2 \neq 0$.

Разделив обе части (5) на $\sqrt{a^2+b^2}$, получаем:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Т.к. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существуют такие углы α и β, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$

или $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$.

Отсюда следует, что уравнение (5) можно переписать в другом виде

$$\sin\alpha\cos x+\sin x\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\left(x+\alpha\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или $\cos\beta\cdot\cos x+\sin\beta\cdot\sin x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\left(x-\beta\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Решение этих уравнений существует лишь при условии $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1.$

В ответе нужно *не забыть* указать, что в качестве α можно взять угол $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$ или $\alpha=\arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ или $\beta=\operatorname{arcos}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 14. Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=5$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\dfrac{3}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}\cos x=1$ и введём вспомогательный угол α : $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

Угол α, замечаем, лежит в первой четверти тригонометрического круга и равен $\arccos\dfrac{3}{5}$.

Получаем в итоге уравнение: $\sin(x+\alpha)=1$.

Ответ: $x=-\arccos\dfrac{3}{5}+\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

Пример 15. Решить уравнение $3\sin x-4\cos x=5\cos 19x.$

Решение. Приведём уравнение к виду $\dfrac{3}{5}\sin x-\dfrac{4}{5}\cos x=\cos 19x,$ сразу видно, что лучше преобразовать левую часть к функции косинус. Полагаем $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$ (берём $\beta = \arccos\frac{4}{5}$), получаем уравнение

$$\cos(x+\beta) + \cos 19x = 0.$$

Отсюда $2\cos\left(10x + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(9x - \frac{\beta}{2}\right) = 0.$

$$10x + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad 9x - \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{20} - \frac{1}{20}\arccos\frac{4}{5} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{18}\arccos\frac{4}{5} + \pi n..$

3.6. Метод оценки

Случается, что предварительная оценка левой и правой частей уравнения помогает сразу решить уравнение или показать, что решений нет.

Пример 16. Решить уравнение $2\sin^5 17x + 3\cos^8 3x = 6$.

Решение. Так как $|\sin 17x| \le 1, |\cos 3x| \le 1$, то указанное равенство не выполняется ни при каком значении x. Таким образом, делаем вывод, что уравнение не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$

Пример 17. Решить уравнение $\sin^2 2x + 1 = \cos^2 3x$.

Решение. Уравнение преобразуется к виду $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 0.$

Так как оба слагаемых неотрицательны, то равенство достигается только в случае их одновременного равенства нулю: $\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 3x = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = \pi n.$

Пример 18. Решить уравнение

$$\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 2x - \sin 4x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + \cos^2 x = 0,$$

заметим, что первые три слагаемых есть полный квадрат:

$$(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 4x)^2 + \cos^2 x = 0.$$

Последнее уравнение, аналогично предыдущему примеру, равносильно системе: $\begin{cases} \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 4x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = 1, \end{array} \right. \\ \cos x = 0. \end{cases}$

Легко видеть эта система не имеет решения.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 19. Решить уравнение $\sin^{10} x + \cos^6 x = 1$.

Решение. Учитывая то, что $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$, получаем возможные случаи, удовлетворяющие уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}.$$

Если же оба слагаемых меньше 1, т.е. выполняется система $\begin{cases} |\sin x| < 1, \\ |\cos x| < 1, \end{cases}$ тогда уравнение не имеет решений. Докажем это.

Т.к. $|\sin x| < 1$, то $\sin^{10} x < \sin^2 x$ и т.к. $|\cos x| < 1$, то $\cos^6 x < \cos^2 x$. Таким образом, $\sin^{10} x + \cos^6 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, т.е. исходное равенство заведомо неверно.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$.