§2. Уравнения, однородные относительно sin*x* и cos*x*, и сводящиеся к ним

Однородными относительно sin*x* и cos*x* называются уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0, \qquad (5)$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – действительные числа. Сумма степеней синуса и косинуса в каждом слагаемом левой части уравнения одинакова и равна числу n, называемому показателем *однородности.*

Если $a_0 = 0$, то, очевидно, корни уравнения $\cos x = 0$ являются одними из корней исходного уравнения. Если же $a_0 \neq 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не являются корнями однородного уравнения, т.к. в этом случае $\sin x = \pm 1$ и $\cos x = 0$, что не удовлетворяет данному уравнению.

Итак, пусть $a_0 \neq 0$, тогда $\cos x \neq 0$ и обе части однородного уравнения можно разделить на $\cos^n x$, в результате чего получим уравнение:

$$a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + a_2 \mathrm{tg}^{n-2} x + ... + a_{n-1} \mathrm{tg} x + a_n = 0, \qquad (6)$$

которое простой заменой $t = \mathrm{tg} x$ сводится к стандартному алгебраическому уравнению $a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + ... + a_{n-1} t + a_n = 0.$

Однородное уравнение первого порядка $a \sin x + b \cos x = 0$ решается сведением к $\mathrm{tg} x$: $\mathrm{tg} x = -\frac{b}{a}$ (см. пример 1г).

2.1. Однородные уравнения второго порядка и сводящиеся к ним

Пример 4. Решить уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$

Решение. Равносильное исходному уравнение $2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg} x + 1 = 0$ дает два действительных решения: $\mathrm{tg} x = -1, \mathrm{tg} x = -\frac{1}{2}.$

Отсюда находим две серии решений исходного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n.$

Уравнения, не являющиеся на первый взгляд однородными и содержащие свободные члены (числа), могут быть сведены к однородным с помощью использования тригонометрической единицы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Пример 5. Решить уравнение $5\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 4$.

Решение. Это уравнение равносильно уравнениям

$$5\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$4\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0,$$
$$4\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg} x - 1 = 0.$$

Полагаем $\mathrm{tg} x = t.$ Уравнение $4t^2 - 2t - 1 = 0$ имеет корни

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n,$

$$x = \mathrm{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi n = -\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n.$$

2.2. Решение однородных уравнений третьего порядка и сводящихся к ним

Пример 6. Решить уравнение $\sin^3 x + 13\cos^3 x - \cos x = 0.$

Решение. Для сведения данного уравнения к однородному воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\sin^3 x + 13\cos^3 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)\cos x = 0,$$
$$\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 12\cos^3 x = 0.$$

Получившееся уравнение решается стандартным методом (заметим, что $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению):

$$\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x + 12 = 0,$$
$$t^3 - t^2 + 12 = 0, \quad (t+2)(t^2 - t + 6) = 0.$$

полученное уравнение имеет только одно решение в действительных числах $t=-2,$ которое дает $x=-\mathrm{arctg}2+\pi n$.

Ответ: $x=-\mathrm{arctg}2+\pi n$.