§1. Простейшие тригонометрические уравнения

Напомним формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$\cos x = a;\quad x = \pm \arccos a + 2\pi n$ при $|a| \le 1$, (1)

$\sin x = a;\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ при $|a| \le 1$, (2)

$\mathrm{tg}\, x = a;\quad x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$, $a \in R$, (3)

$\mathrm{ctg}\, x = a;\quad x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$, $a \in R$, (4)

где $n \in \mathbb{Z}$,, а область значений числа a определяется из свойств тригонометрических функций (в дальнейшем, если не сказано обратного, будем считать, что $n \in \mathbb{Z}$).

В ряде случаев для корней уравнения $\sin x = a$ $\left(|a| \le 1\right)$ удобнее использовать формулу

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k. \end{array}\right. \qquad (2')$$

Формулы (1)-(2) и $(2')$ верны при всех $|a| \le 1$. Для случаев $a = 0, \pm 1$, они имеют более простой вид, который полезно запомнить:

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$; г) $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + \pi n$;
б) $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi n$; д) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$;
в) $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi n$; е) $\cos x = -1$, $x = \pi(2n + 1)$.

Замечание. **Не может быть** зачтено решение задачи, если, например, школьник (абитуриент), получив простейшее уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$, пишет $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi m -$ приведённая формула, даёт также и решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{3} -$ убедитесь в этом самостоятельно. Также **не может быть зачтено** решение уравнения, если в ответе присутствует запись вида $x=(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}}{2}+\pi n$, т.к. $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$.

Все тригонометрические уравнения и системы с помощью преобразований сводятся, как правило, к решению одного или нескольких простейших уравнений.

Пример 1. Решить уравнения

а) $2\sin\left(x^2+2\right)=1$; б) $\cos^2 3x=\sin^2 3x$;

в) $\cos x-3\sin\frac{x}{2}=1$, г) $2\sin x-3\cos x=0$.

Решение. а) Согласно формуле $(2')$ из уравнения $\sin\left(x^2+2\right)=\frac{1}{2}$ получаем $x^2+2=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.$ т.е. $x^2=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}-2+2\pi n,\\ \frac{5\pi}{6}-2+2\pi n.\end{array}\right.$

Так как $x^2\ge 0$, то в первой строчке n может принимать только значения $n=1,2,\dots$, а во второй $n=0,1,2,\dots$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}-2+2\pi n}$, $n=1,2,\dots$.

$x=\pm\sqrt{\frac{5\pi}{6}-2+2\pi n}$, $n=0,1,2,\dots$

б) Записываем уравнения в виде $\cos^2 3x-\sin^2 3x=0$.

Имеем $\cos 6x=0$, $6x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$.

в) Используем формулу $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и приводим уравнение $\cos x - 3\cos\frac{x}{2} = 1$ к виду $2\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} - 2 = 0.$ Полагаем $\cos\frac{x}{2} = t.$ Квадратное уравнение $2t^2 - 3t - 2 = 0$ имеет корни $t = 2$ и $t = -\frac{1}{2}.$ Т.к. $\left|\cos\frac{x}{2}\right| \le 1,$ то $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},\quad \frac{x}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

Ответ: $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n.$

г) Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$ равносильно уравнению $\mathrm{tg}x = \frac{3}{2}.$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n.$

Для решения тригонометрических уравнений необходимо хорошо знать основные тригонометрические формулы. Например, формула $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ должна держаться в памяти и в виде $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Также полезно помнить, что $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, а $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$, $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2.$

Пример 2. Решить уравнение $2\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 1.$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} = 1,$$

оно равносильно уравнению $\frac{2(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = 1$ и системе

$$\begin{cases} 2\cos x - 2\sin x = \cos x + \sin x, \\ \cos x + \sin x \ne 0. \end{cases}$$

получаем $\cos x = 3\sin x$ (второе уравнение выполнено), $\mathrm{tg} x = \frac{1}{3}$, $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n.$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n.$

Очень часто при упрощении тригонометрического выражения используется тригонометрическая единица $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Пример 3. Решить уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x - \cos^2 2x = 0.$
Решение. Так как

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x =$$

$$= \left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] - \frac{1}{8}\sin^4 2x =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^4 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x =$$

$$= \cos^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x,$$

то уравнение равносильно уравнению $\sin^4 2x = 0.$ Значит $\sin 2x = 0,\ 2x = \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}.$

