§ 5. Приближение параксиальной оптики

Поскольку физика по своей сути — наука экспериментальная, в ней почти всегда получаются приближенные результаты. Тому много причин: неточности измерительной аппаратуры, эмпирический характер используемых законов, неточность вычислительных приборов и т.д. Учитывая все это, физики иногда уже сами исходные формулы сознательно записывают в приближенном виде. Это здорово облегчает им жизнь, упрощает вычисления и экономит время. Давайте рассмотрим одно из таких полезных упрощений. Называется оно *приближением параксиальной оптики*, а суть его заключается в том, что рассматриваются только те лучи, которые на своем пути незначительно отклоняются от оптической оси системы[1]. При этом угол между оптической осью и падающим лучом света настолько мал, что можно считать

$$\cos\varphi \approx 1, \qquad \text{а} \qquad \mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi .$$

Здесь φ выражен в радианах. Например, закон Снелла в параксиальном приближении выглядит предельно просто:

$$n_1\varphi_1 = n_2\varphi_2. \tag{5.1}$$

Задача 5.1. Луч света падает из воздуха на невозмущённую водную поверхность под углом $\varphi = 10°$. Найти угол преломления по точной формуле (1.2) и приближенной (5.1). На сколько процентов приближённый результат отличается от точного? Для воды $n = 4/3$.

Решение. Согласно (1.2) $\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1 / n,$ откуда следует, что по точной

[1] Оптическая ось системы — это общая ось всех входящих в систему линз и зеркал. Главная оптическая ось линзы — это прямая, проходящая через центры кривизны преломляющих поверхностей.

формуле $\varphi_2 \cong 0{,}1306$ рад, в то время как по приближенной формуле $\varphi_2 \cong \varphi_1 / n_2 = 0{,}1309$. Относительная погрешность приближённых вычислений равна $0{,}2$ %, т. е. менее одного процента!

§ 6. Сферические зеркала

Трудно встретить человека, который бы не видел сферических зеркал. В самом деле, кто из нас не любовался сверкающими разноцветными шарами на новогодней елке, кто не потешался над своим изображением, искаженным сферической поверхностью?

Наверное, вы обращали внимание и на то, что чем дальше предмет от зеркала, тем правильнее его пропорции. Законами построения таких «правильных» изображений мы и займемся.

Проведем через центр *C* сферы оптическую ось *x* (рис. 6.1).

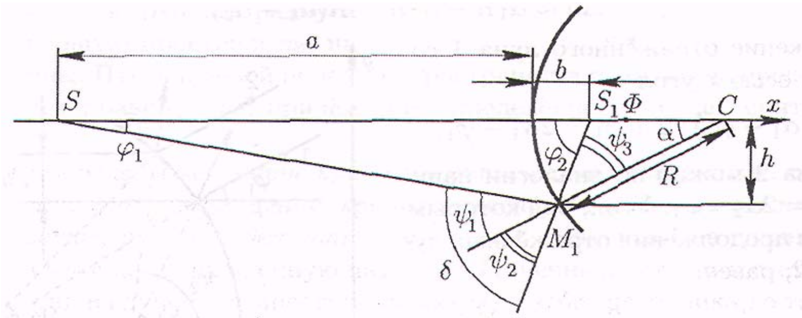

Рис. 6.1

Разместим на ней точечный источник света *S*. Пусть SM_1 — произвольный луч от источника до зеркала, ψ_1 — угол падения, ψ_2 — угол отражения. Если продолжить отраженный луч за зеркало (внутрь шара), то на его пересечении с осью *x* (одновременно это и второй луч) будет лежать изображение S_1 источника *S*. Попытаемся найти аналитическую связь между углами φ_1 и φ_2.

Для треугольника SM_1S_1 угол δ — внешний, а по теореме о внешнем угле треугольника

$$\delta = \varphi_1 + \varphi_2. \qquad (6.1)$$

Для треугольника M_1S_1C угол φ_2 — внешний. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\varphi_2 = \alpha + \psi_3. \qquad (6.2)$$

Поскольку $\psi_1 = \psi_2$ (по закону отражения), то $\delta = 2\psi_2$. Углы ψ_2 и ψ_3 равны как вертикальные, следовательно

$$\delta = 2\psi_3. \tag{6.3}$$

Подстановка (6.3) в (6.2) дает: $\varphi_2 = \alpha + \dfrac{\delta}{2} \;\Rightarrow\; \delta = 2(\varphi_2 - \alpha).$

Подставим последнее выражение в (6.1):

$$2(\varphi_2 - \alpha) = \varphi_1 + \varphi_2 \;\Rightarrow\; \varphi_2 - \varphi_1 = 2\alpha \tag{6.4}$$

Смотрите! Если зафиксировать точку M_1 на зеркале, то угол α тоже окажется фиксированным. Если теперь смещать источник *S* вдоль оси *x*, то углы φ_1 и φ_2 будут изменяться, но их разность окажется неизменной. В пре - деле, при удалении *S* влево на бесконечно большое расстояние угол φ_1 обратится в ноль, а $\varphi_2 = 2\alpha$.

Заметим, что в приближении параксиальной оптики расстояние *h* от точки M_1 до оси *x* мало, т.е. $h \ll R$, где *R* — радиус сферического зеркала. Следовательно, можно записать приближенные равенства:

$$\varphi_1 \approx \frac{h}{a},\; \varphi_2 \approx \frac{h}{b},\; \alpha \approx \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R}}.$$

Их подстановка в (6.4) даст: $\dfrac{h}{b} - \dfrac{h}{a} = 2\dfrac{h}{R}.$

После сокращения на *h* получим $\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{R}.$

В силу произвольности выбора точки M_1 легко сделать вывод, что пучок параллельных лучей, распространяющихся вдоль оптической оси, соберется в точке Ф, отстоящей от центра сферы на расстояние $R/2$, , и называемой *фокусом* сферического зеркала. Обозначим это расстояние символом *F*. Итак,

$$F = \frac{R}{2}, \tag{6.5}$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F}. \tag{6.6}$$

Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси *x* и отстоящая от поверхности сферического зеркала (и центра сферы) на расстояние *R/2*, называется *фокальной плоскостью.*

Задача 6.1. Показать, что в приближении параксиальной оптики пучок параллельных лучей, наклоненных к оптической оси под углом φ_1, стягивается в точку на фокальной плоскости.

Решение. Из рис. 6.2 видно, что расстояние вдоль оси *y* между лучами 1 и 2

$$\Delta h \approx \alpha_1 R - \alpha_2 R = R(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Продолжение отраженного луча 1 составит с осью x угол

$$\psi_1 = (\alpha_1 - \varphi_1)\cdot 2 + \varphi_1 = 2\alpha_1 - \varphi_1.$$

Для луча 2 можно по аналогии написать $\psi_2 = 2\alpha_2 - \varphi_1$. Угол $\Delta\psi$, под которым сходятся продолжения отраженных лучей 1 и 2, равен:

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Следовательно, лучи пересекутся на расстоянии $x \approx \dfrac{\Delta h}{\Delta\psi} = \dfrac{R(\alpha_1 - \alpha_2)}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} = \dfrac{R}{2}$

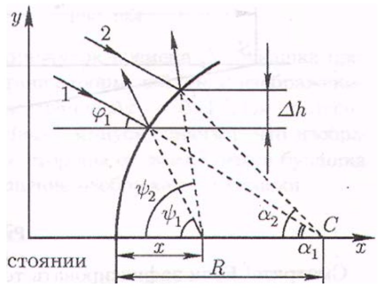

Рис. 6.2

от поверхности зеркала. Т.к. результат не зависит от выбора углов α_1 и α_2, задачу можно считать решенной.

Используя приближение параксиальной оптики, мы получили удобные формулы для построения изображений точечных источников в выпуклых сферических зеркалах.

Несложно обобщить полученные результаты на случай вогнутых сферических зеркал (см. рис. 6.3):

$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha,$ или с учетом (6.5)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

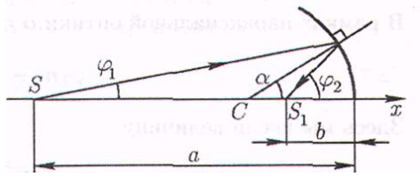

Рис. 6.3

Замечательно то, что подобного рода формулы получаются и для линз.