

### Контрольные вопросы

**1(2).** Пусть  $A, B, C, D$  – четыре точки пространства, не лежащие на одной прямой. Докажите, что отрезок, соединяющий середины  $K$  и  $M$  отрезков  $AB$  и  $CD$  соответственно, пересекается с отрезком, соединяющим середины  $L$  и  $N$  отрезков  $AD$  и  $BC$  соответственно. Докажите кроме того, что эти отрезки точкой своего пересечения делятся пополам.

**2 а)(3).** Какие многоугольники могут быть сечениями куба плоскостью?

**б)(4).** Какие правильные многоугольники могут быть сечениями куба плоскостью?

**3(3).** Докажите, что у любого тетраэдра существует сечение, являющееся ромбом. В каких отношениях плоскость этого сечения делит рёбра тетраэдра, которые она пересекает, если длины скрещивающихся рёбер тетраэдра равны  $a$  и  $b$ ?

**4(3).** Боковое ребро пирамиды разделено на 100 равных частей и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение площадей наибольшего и наименьшего из получившихся сечений.

**5(4).** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Постройте сечение куба плоскостью и найдите площадь сечения, если плоскость проходит через вершины  $A$  и  $D_1$  и середину ребра  $BB_1$ . В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $B_1 C_1$ ?

**6(3).** Постройте сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точку  $A$  параллельно плоскости  $DBC_1$ . В каком отношении плоскость сечения делит диагональ  $CA_1$  этого куба?

**7(4).** Постройте сечение правильной четырёхугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через вершину  $A$  и середины рёбер  $B_1 C_1$  и  $D_1 C_1$ . Найдите площадь сечения, если  $AB = 1$ ,  $AA_1 = 2$ .

**8(3).** Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $K \in AA_1$ ,  $AK = \frac{1}{4} AA_1$ ;  $L \in CC_1$ ,  $C_1 L = \frac{1}{4} CC_1$  параллельно диагонали  $BD$  нижнего основания параллелепипеда.

**9(4).** Постройте сечение правильного тетраэдра  $SABC$  плоскостью, проходящей через точку  $M$  – середину ребра  $AS$ , точку  $N$  – центр грани  $BCS$  и точку  $P$ , лежащую на высоте  $BH$  треугольника  $ABC$  так, что  $HP = 2BP$ . В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $AB$ ?

#### Задачи

**1(4).** Длины двух противоположных перпендикулярных рёбер тетраэдра равны  $a$  и  $b$ . Расстояние между этими рёбрами равно  $c$ . В тетраэдр вписан куб, четыре ребра которого перпендикулярны этим двум рёбрам тетраэдра, а на каждой грани тетраэдра лежат ровно две вершины куба. Найдите ребро куба.

**2(3).** Доказать, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

**3(5).** Точки  $K$  и  $L$  расположены на диагоналях  $BA_1$  и  $CB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно так, что отрезок  $KL$  параллелен грани  $ABCD$  куба. Известно, что  $KL : KB = \sqrt{5/8}$ . Найти отношения  $BK : BA_1$  и  $CL : CB_1$ .

**4(5).** Для правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  найдите: а) расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SEF$  и угол между ребром  $SA$  и плоскостью  $SEF$ , если  $AB = a$ ,  $SA = b$ ; б) наибольшее возможное значение угла между ребром  $SA$  и плоскостью  $SEF$ .

**5(6).** Сторона основания  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  равна  $a$ , а боковое ребро равно  $b$ . Пирамиду пересекает плоскость  $\alpha$ , параллельная рёбрам  $AD$  и  $BC$ . На каком расстоянии от ребра  $AD$  должна быть проведена плоскость  $\alpha$ , чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

**6(8).** (МФТИ – 2000) В правильной треугольной пирамиде  $ABCD$  угол  $\angle ADC = 2 \arcsin(1/6)$ , сторона основания  $ABC$  равна 2. Точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$  – середины рёбер  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$  соответственно. Точка  $E$  лежит на отрезке  $KM$  и  $3ME = KE$ . Через точку  $E$  проходит плоскость  $\pi$  перпендикулярно отрезку  $KM$ . В каком отношении плоскость  $\pi$  делит рёбра пирамиды. Найти площадь сечения и расстояние от точки  $N$  до плоскости  $\pi$ .

**7(7).** (МФТИ – 2004) Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$ , середину ребра  $AD$  и параллельной прямой  $A_1 C_1$ ;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$  параллельной прямой  $A_1 C_1$ , у которой площадь проекции сечения на плоскость  $A_1 C_1 A$  максимальна.

**8(7).** Правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  пересечена плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB$ ,  $A_1C_1$  и  $BB_1$ . Построить сечение призмы, найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания  $ABC$  и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна  $\frac{\sqrt{42}}{7}$ .