§ 1. Параллельность прямых и плоскостей

Определение параллельных прямых, параллельной прямой и плоскости, параллельных плоскостей приведены в школьном учебнике геометрии. В дополнение к материалу учебника приведем некоторые теоремы, часто используемые при решении многих задач по стереометрии.

Теорема 1 (*теорема о линии пересечения*). *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

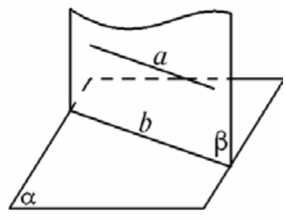


Рис. 1

Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \| \alpha$ (рис.1). Тогда a и b лежат в плоскости β и не пересекаются, иначе точка их пересечения принадлежала бы плоскости α, что противоречит параллельности a и α, следовательно, $a \parallel b$.

Теорема 2. *Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.*

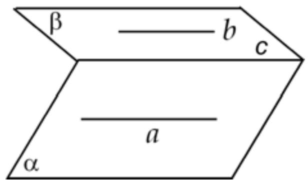


Рис. 2

Пусть $a \parallel b$, где $a \subset \alpha, b \subset \beta$, причем $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2). Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$. Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. По теореме о линии пересечения $c \parallel a$. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$.

Теорема 3. *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.*

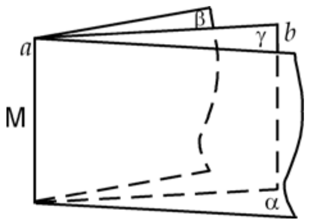


Рис. 3

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a, а прямая b параллельна плоскостям α и β. Возьмем на прямой a точку M и проведем плоскость γ через b и M (рис. 3). Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a_1, а плоскость β — по прямой a_2. По теореме о линии пересечения $a_1 \parallel b$ и $a_2 \parallel b$.

Но прямые a_1 и a_2 имеют общую точку M, следовательно, это одна и та же прямая a (так как $a_1 \in \alpha$, $a_2 \in \beta$). Итак, $a \parallel b$.

Пример 1. *Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.*

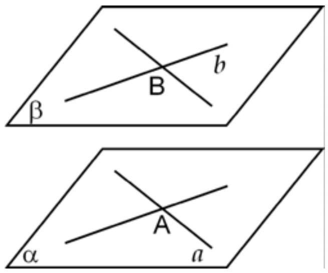
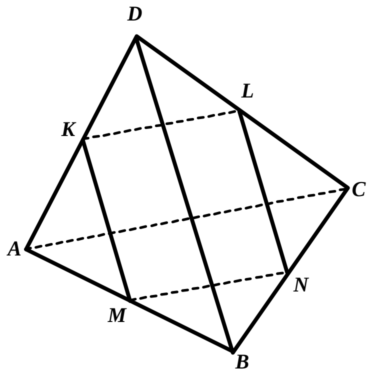


Рис. 4

Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмем на прямой a точку A и проведем через нее прямую, параллельную прямой b (в плоскости, проходящей через A и b). Через a и построенную прямую проведем плоскость α. Аналогично строим плоскость β (рис. 4). По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$.

Приведенное построение часто оказывается полезным при решении многих задач о скрещивающихся прямых, поэтому следует его запомнить.



Пример 2. Даны точки A, B, C и D не лежащие в одной плоскости. Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD и DA являются вершинами параллелограмма (пространственная теорема Вариньона[1]).

□ Действительно, пусть K – середина AD, L – середина DC, M – AB и N – BC соответственно. Тогда KL – средняя линия треугольника ADC и потому $KL \parallel AC$. Аналогично $MN \parallel AC$. Следовательно $KL \parallel MN$. Значит точки K, L, M и N лежат в одной плоскости, проходящей через пару параллельных прямых KL и MN. Рассуждая аналогично, получаем, что $KM \parallel BD \parallel LN$. Откуда следует, что в плоском четырёхугольнике $KLMN$ противолежащие стороны параллельны. То есть он является параллелограммом. ■

[1] **Вариньон** Пьер (Varingnon Pierre), 1654 – 1722, французский математик и механик, член Парижской Академии Наук, с 1704 профессор College de France. Основные труды по геометрии и статике. Одним из первых предложил разработку дифференциального исчисления Г. Лейбница.