Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Тригонометрические уравнения

Задание №4 для 10-х классов
(2007-2008 учебный год)

г. Долгопрудный, 2007

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 10-х классов (2007-2008 учебный год). - М.: МФТИ, 2007, 32с.

Дата присылки заданий по физике и математике – 7 января 2008г.

Составитель:
Колесникова Софья Ильинична
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 10.10.07
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1800. Заказ № 5-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел. 409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru
Наш сайт: www.school.mipt.ru

Дорогие десятиклассники!

Высылаем Вам задание, в котором много задач по тригонометрии. Нам известно, что не все еще прошли этот материал. Поэтому попробуйте самостоятельно прочитать материал по учебнику, а потом изучите методичку. Решайте только те задачи, которые можете. На всякий случай, напишите на обложке, что в школе Вы тригонометрию еще не изучали.

§1. Определение функции. Числовые функции и их графики

Пусть X и Y - произвольные множества. Говорят, что на X задано отображение, или задана функция, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие **единственный** элемент y множества Y. Закон соответствия обычно обозначается какой-нибудь буквой, часто буквой f, а само соответствие обозначается $f : X \to Y$ или $y = f(x)$. При этом $x \in X$ называется независимой переменной, или аргументом функции $f(x)$, а y называется значением функции, или образом элемента x.

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Подмножество множества Y, состоящее из образов всех элементов X, называется образом множества X, или множеством значений функции $f(x)$, и обозначается $f(X) \subset Y$, или $E(f) \subset Y$.

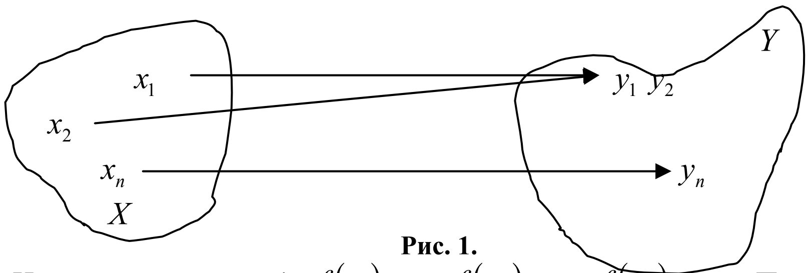


Рис. 1.

Например, на рис. 1 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_n) = y_n$. При этом различным элементам множества X может соответствовать один и тот же элемент множества Y $(y_1 = f(x_2) = f(x_1))$, но **одному элементу множества X должен соответствовать один элемент из множества** Y.

Пример 1. Поставим в соответствие каждому человеку планеты его группу крови. Тогда X состоит из нескольких миллиардов человек, а $f(X)$ состоит из 4-х чисел. Замечаем, что очень многим элементам множества X ставится в соответствие одно и то же число.

Пример 2. Поставим каждому человеку планеты отпечаток большого пальца его правой руки. Теперь X – то же, что и примере 1, а $f(X)$– множество “картинок”. Как известно, у разных людей разные отпечатки!

В алгебре и математическом анализе мы, в основном, изучаем **числовые** функции, где множества X, Y являются подмножествами, например, числовой оси. Тогда $f(X)$ называется **множеством значений** функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ на координатной плоскости (x, y) называется множество точек $(x, f(x))$.

Пример 3. (графики на рис. 2).

а) $g : R_+ \cup \{0\} \to R : y = \sqrt{x} (D(g) = R_+ \cup \{0\}, E(g) = R_+ \cup \{0\})$.

б) $f : (-\infty;0) \cup (0;+\infty) \to R : y = \dfrac{1}{x}$. $(E(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

в) $f : R \to R :\ y = |x|$ (модуль, или абсолютная величина числа *x*). По определению,

$$|x| = \begin{cases} x, если\ x \ge 0; \\ -x, если\ x < 0. \end{cases} \quad (D(f) = R, E(f) = [0;+\infty) \equiv R_+ \cup \{0\}).$$

г) $y = signx \equiv \left[\begin{array}{l} 1, если\ x > 0; \\ 0, если\ x = 0; \\ -1, если\ x < 0. \end{array}\right. \Rightarrow D(y) = R, E(y) = \{-1, 0, 1\}$. (читается “сигнум”, что означает “знак”).

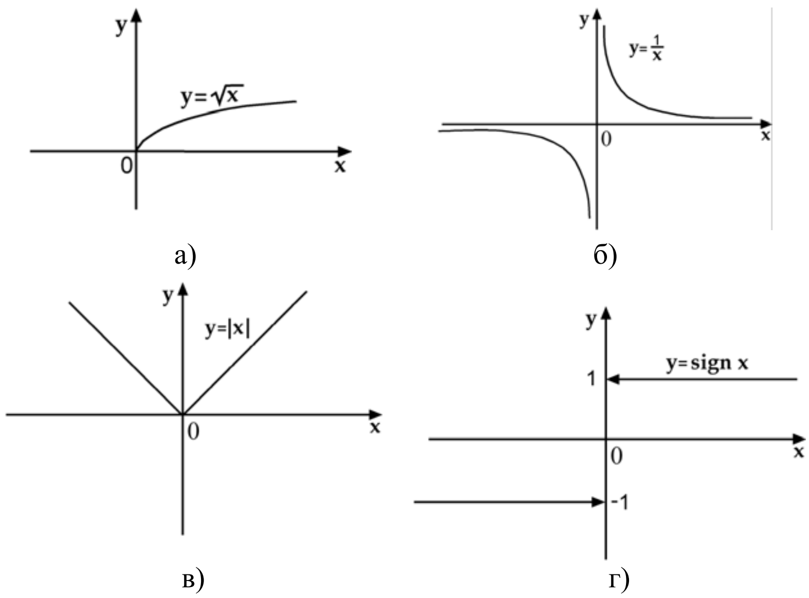


Рис. 2

Пример 4. Функция $y = [x]$ – целая часть числа x. Величина $[x]$ определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x. Если $x \in [0;1)$, то $[x] = 0$. Если $x \in [1;2)$, то $[x] = 1$. Если $x \in [2;3)$, то $[x] = 2$ и т.д. Рассмотрим теперь отрицательные значения x. Если $x \in [-1;0)$, то $[x] = -1$. Если $x \in [-2;-1)$, то $[x] = -2$ и т.д. График функции изображен на рис.3. Ясно, что $D(f) = R$; $E(f) = Z$ (так обозначается множество всех целых чисел).

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и не задана область определения, то её областью определения называется множество всех x, для которых формула имеет смысл.

Пример 5.

а) $y = x^2$ (т. к. x^2 определено для любого x, то $D(y) = R$; функция не имеет обратной).

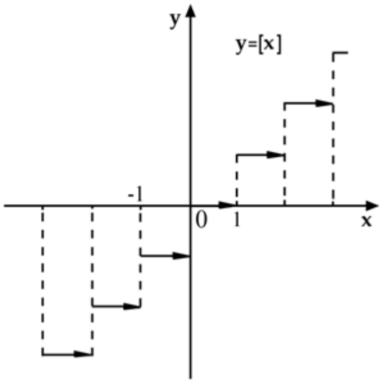


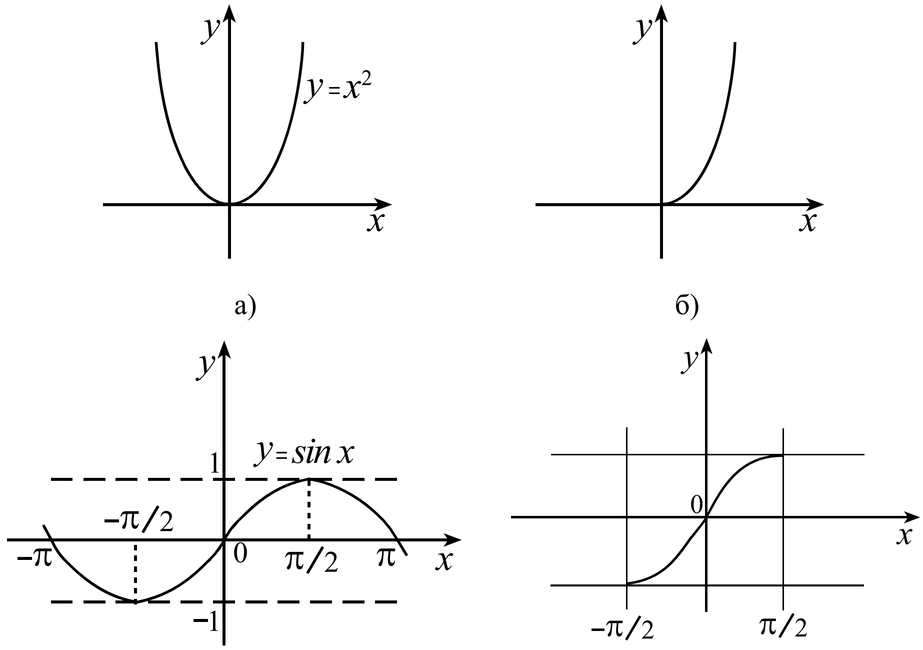
Рис. 3

б) $y = x^2, D(y) = [0;+\infty)$ (функция имеет обратную $x = \sqrt{y}$).

в) $y = \sin x$ ($D(y) = R$, функция не имеет обратной).

г) $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (функция имеет обратную $x = \arcsin y$).

Функции пунктов а) и б) **различны**, т. к. у них разные области определения, хотя и одинаковые законы соответствия в общих областях! По этой же причине различны функции пунктов в) и г).



а) б)

в) г) $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Рис. 4

§2. Обратная функция

Рассмотрим отображение $f: X \to f(X)$, или, что то же, $f: X \to E(f)$, (обратим внимание на то, что мы рассматриваем отображение не просто в Y, а в ту его часть, которая состоит из образов всех $x \in X$) такое, что **различным** $x \in X$ соответствуют **различные** $y = f(x) \in Y$, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ (рис. 5). Такое отображение $f : X \to f(X)$ называется взаимно однозначным.

В этом случае соответствие между $f(X)$ и X также является функцией с областью определения Y и областью значений X (рис.5), т. к. каждому $y \in f(X) \equiv E(f)$, соответствует, по крайней мере, один $x \in X$, а, в силу взаимной однозначности отображения, ровно один. Эта функция называется *обратной* к функции f и обозначается f^{-1}. Отметим, что

$$D(f) = E(f^{-1}) = X; \ E(f) = D(f^{-1}) = Y.$$

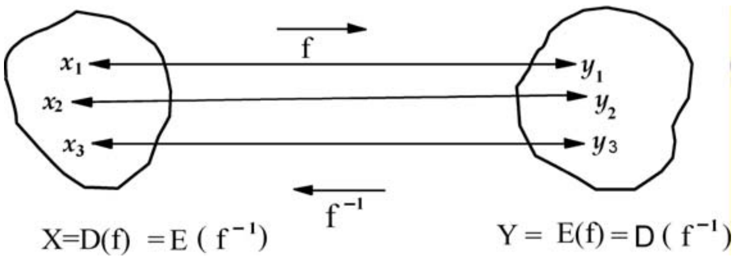


Рис. 5

Итак, **функция имеет обратную, если она осуществляет взаимно однозначное соответствие** между $D(f)$ и $E(f)$. (Поэтому, например, строго монотонная функция всегда имеет обратную.)

Пример 6. Отображение примера 1 не является взаимно однозначным. Отображение примера 2 является взаимно однозначным и даёт возможность идентифицировать человека по его отпечатку.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y = x^3$.

Сравним значения функции в различных точках:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \equiv (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$, т. е. рассматриваемое отображение взаимно однозначно. **Любая** горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график функции в

единственной точке. Абсцисса этой точки **обозначается** $\sqrt[3]{a}$. Она является единственным решением уравнения $x^3 = a$.

Функция $y = x^3$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между областью определения $D(f) = R$ и множеством значений $E(f) = R$. Поэтому существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = R$ и множеством значений $E(f^{-1}) = R$. Эта функция обозначается: $x = \sqrt[3]{y}$. Если переобозначить переменные более привычно, то формула примет вид: $y = \sqrt[3]{x}$ (график на рис. 6). Графики исходной функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ – биссектрисы первого и третьего координатных углов (x и y поменялись местами).

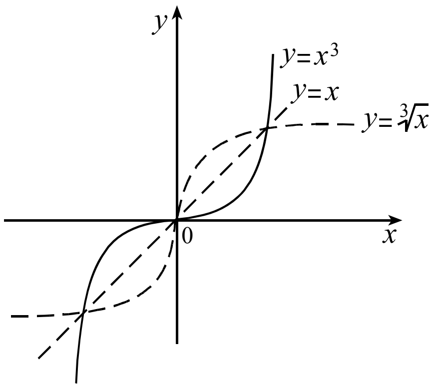
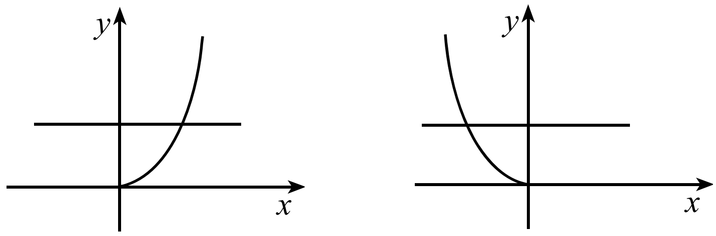


Рис. 6

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = x^2$ (раз не указана область определения, то $D(f) = R$). Она не имеет обратной функции, так как различным $x_1 \neq 0$ и $x_2 = -x_1$ соответствует один $y = x_1^2 = x_2^2$, т. е. не существует взаимно однозначного соответствия между $D(f)$ и $E(f) = [0;+\infty)$.



а) **Рис. 7** б)

Пример 9. Рассмотрим другую функцию: $y = x^2$, $D(f) = [0;+\infty)$ (рис. 7а). Любая прямая $y = a, a \ge 0$ пересекает кривую в единственной точке, абсцисса которой **обозначается** $\sqrt{a}$. В этом случае соответствие между $D(f) = [0;+\infty)$ и $E(f) = [0;+\infty)$ является взаимно однозначным, и существует обратная функция f^{-1}. Она обозначается: $x = \sqrt{y}$ с областью определения $D(f^{-1}) = [0;\infty)$ и множеством значений $E(f^{-1}) = [0;\infty)$. В привычных переменных это функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 8).

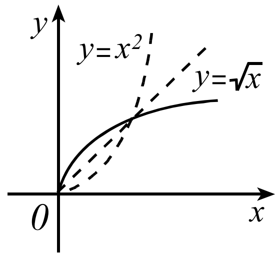


Рис. 8

Пример 10. Можно рассмотреть ещё одну функцию: $y = x^2, D(f) = (-\infty;0]$ (рис.7б). Эта функция строго монотонна и тоже имеет обратную: $x = -\sqrt{y}$ с

$$D\left(f^{-1}\right) = [0;+\infty), E\left(f^{-1}\right) = (-\infty;0].$$

§3. Монотонные функции. Четные и нечетные функции

Числовая функция $f(x)$, определённая на множестве X, называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \left(f(x_2) < f(x_1)\right).$$

Функция возрастающая или убывающая на множестве, называется монотонной функцией. Для нас важно, что отсюда следует, что из $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$, а, следовательно, любая **монотонная функция имеет обратную**. Монотонность элементарных функций можно доказывать непосредственно или с помощью производных (это будет позже). Можно рассматривать ещё так называемые не строго монотонные функции – это функции, для которых для любых

$x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ – это неубывающая функция, или для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ – невозрастающая функция. К ним относится функция $y = const$, которая является одновременно и неубывающей, и невозрастающей, и не имеет обратной.

Пример 11. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. Формула имеет смысл для $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, что и будет $D(y)$. Исследуем разность $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$. Отсюда следует, что, если $x_2 > x_1$ и $x_1 x_2 > 0$, т. е. они одного знака, то разность отрицательна. Следовательно, функция убывает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;+\infty)$, но не убывает на $D(y)$ (а потому не является монотонной на области определения), т.к. если $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ (что подтверждает правильность рис. 2б).

Функция $f(x)$ называется четной (нечетной) на X, если выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $-x \in X$, т. е. область определения симметрична относительно 0.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x) = f(-x)$ $\left(f(x) = -f(-x)\right)$.

Если функция не является чётной или нечётной, то говорят, что она является функцией общего вида.

Пример 12. Определить, являются ли чётными, нечётными или функциями общего вида следующие функции:

$$\text{а) } y = \sqrt{x}, \quad \text{б) } y = \cos 4x, \quad \text{в) } y = \frac{x^3 - 4\sin 2x}{ctgx},$$

$$\text{г) } y = |x+1| - |x-1|, \quad \text{д) } y = \frac{x-1}{x^2+4}.$$

♦ а) $y = \sqrt{x}$ является функцией общего вида, т. к. её область определения $D(y) = [0;+\infty)$ не симметрична относительно 0.

б) $y = \cos 4x$ – чётная функция.

в) $y = \dfrac{x^3 - 4\sin 2x}{ctgx}$ – чётная функция, т. к.

1) область определения $D(y)$ этой функции, состоящая из объединения счётного множества интервалов вида $\left(\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$, симметрична относительно 0;

2) для любого $x \in D(y) \Rightarrow y(x) = y(-x)$.

г) $y = |x+1| - |x-1|$ – нечётная, т. к.

$y(-x) = |-x+1| - |-x-1| = -(|x+1| - |x-1|) = -y(x)$.

д) $y = \dfrac{x-1}{x^2+4}$ – функция общего вида, т. к., например,

$$\begin{cases} 0 = y(1) \neq y(-1) = -\dfrac{2}{5}, \\ y(1) \neq -y(-1). \end{cases} \blacklozenge$$

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому для построения графиков таких функций достаточно построить их для положительных значений, а затем продолжить чётным или нечётным образом соответственно.

Посмотрим, как используется чётность функций при решении задач.

Пример 13. (МГУ, 1990, мехмат). Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

♦ Заметим, что левая часть уравнения является чётной функцией на R. Поэтому, если уравнение имеет решение $x = x_0$, то $x = -x_0$ тоже является решением. Если $x_0 \neq -x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня. Поэтому, если корень один, то это $x = 0$. Посмотрим, при каких a уравнение имеет такой корень.

$x = 0: -2a\sin 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \left[\begin{array}{l} 0, \\ 2\sin 1. \end{array}\right.$

Но при таких a уравнение может иметь, вообще говоря, и другие корни – такие a нам не подходят. Найдём все решения при полученных a.

$a = 0: x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$a = 2\sin 1: x^2 - 4\sin 1 \sin\cos x + 4\sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4\sin 1(\sin\cos x - \sin 1) \le 0 \quad (\sin\cos x \le \sin 1) \Leftrightarrow x = 0.$

Итак, при этих a имеем единственное решение $x = 0$.

Ответ: $0; 2\sin 1$. ♦

§4. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической на X, если существует число $T \ne 0$, для которого выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $x + T \in X, x - T \in X$.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x+T) = f(x) = f(x-T)$.

Если функция имеет период T, то любое число вида nT, $n \in Z$ – тоже период. Поэтому, говоря о периоде функции, часто имеют в виду наименьший положительный (НПП) период, если таковой существует. Из школы, например, известно, что $y = \sin x, y = \cos x$ имеют наименьший положительный период $T = 2\pi$, а $y = tgx, y = ctgx$ имеют наименьший положительный период $T = \pi$. Область определения tgx и $ctgx$ не совпадает с R, но является периодичной с периодом π.

Не все периодические функции имеют наименьший положительный период: например, $y(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ является суммой двух функций, каждая из которых имеет наименьший положительный период π. Но сумма $y(x)$ НПП не имеет, т. к. $y = \sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, и её периодом является любое действительное число.

Пример 14. (МГУ, 1996, геогр. ф-т). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = \sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если известно, что $3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0$ и $f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + \frac{20}{9} = 0.$

♦ В силу периодичности,

$f(0)=f\left(k\sqrt{2}\right), k\in Z\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=f\left(\sqrt{8}\right)=f\left(2\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{72}\right)=f\left(6\sqrt{2}\right)$.

Поэтому

$$\begin{cases}3f^2(0)+7f\left(\sqrt{72}\right)+4=0,\\ f^2\left(-\sqrt{2}\right)+3f\left(\sqrt{8}\right)+\dfrac{20}{9}=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3f^2(0)+7f(0)+4=0,\\ f^2(0)+3f(0)+\dfrac{20}{9}=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2f(0)+4-\dfrac{20}{3}=0\Leftrightarrow f(0)=-\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{16}{9}-4+\dfrac{20}{9}\equiv 0.\end{cases}\Rightarrow$$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, ф-т почвоведения). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x)=8x-x^2$ при $x\in[0;8]$. Решите уравнение $f(2x+16)+23=5f(x)$.

♦ В силу периодичности $f(x)$, во-первых, достаточно найти решения уравнения на любом отрезке длины 8, во-вторых, $f(2x+16)=f(2x)$, поэтому $f(2x+16)+23=5f(x)\Leftrightarrow f(2x)+23=5f(x)$.

Посмотрим, при каких n аргумент $f(2x+n\cdot 8)$ принадлежит промежутку, в котором определена $f(x)$, т. е.

$$0\le 2x+n\cdot 8\le 8\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 2x\le 8-8n\Rightarrow n\le 1,\\ 16\ge 2x\ge -8n\Rightarrow n\ge -2.\end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай.

$n=1: 0\le x\le 0\Leftrightarrow x=0$,

$n=0: 0\le 2x\le 8\Leftrightarrow 0\le x\le 4\Rightarrow f(2x)=8\cdot 2x-(2x)^2\Rightarrow 16x-4x^2+23=40x-5x^2\Rightarrow x=1$,

$n=-1: 0\le 2x-8\le 8\Leftrightarrow 4\le x\le 8\Leftrightarrow f(2x)=f(2x-8)=8(2x-8)-(2x-8)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 16x-64-4x^2+32x-64+23=40x-5x^2\Leftrightarrow x^2+8x-105=0\Rightarrow x=7.$

$n=-2; 0\le 2x-16\le 8\Leftrightarrow 8\le x\le 12.$

Здесь уже нет необходимости рассматривать.

В силу периодичности, решениями будут числа
$1+8\cdot n,\ 7+8\cdot m,\ n,m\in Z.\Rightarrow$

Ответ: $1+8n,\ 7+8m;\ n,m\in Z.$ ♦

§5. Обратные тригонометрические функции

Рассмотрим не всю синусоиду, а только ее **часть**, определенную на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: функцию $y=\sin x, D(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 4г). Любая прямая $y=a, a\in[-1;1]$ пересекает график этой функции в **единственной** точке, абсцисса x которой **обозначается** $\arcsin a$. Именно обозначается, потому что конкретное значение для конкретного a вычисляется, за редким исключением, по формулам высшей математики. Эти вычисленные с определенной степенью точности значения заложены в калькуляторах. Из определения $\arcsin a$ немедленно следуют **тождества:** $\arcsin\sin x\equiv x$, если $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

$\sin\arcsin a\equiv a,\ a\in[-1;1]$.

Эти тождества, как и основное логарифмическое, относительные, потому что они имеет место не для всех x, а лишь для $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и не для всех a, а лишь для $a\in[-1;1]$.

Функция $y=\sin x, D(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, т. е. строго монотонна на области определения, поэтому имеет обратную. Обратная функция тоже монотонно возрастает, ее графиком является кривая, симметричная $y=\sin x, D(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ относительно биссектрисы $y=x$ (рис. 9). Обычно независимую переменную обозначают x, а зависимую y. Поэтому более привычно записать $y=\arcsin x, D(y)=[-1;1]$, $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично определяются функции:

$y = \arccos x, D(\arccos x) = [-1;1], E(\arccos x) = [0;\pi]$ (рис. 10).

$y = arctgx, D(arctgx) = R, E(arctgx) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$y = arcctgx, D(arcctgx) = R, E(arcctgx) = (0;\pi)$.

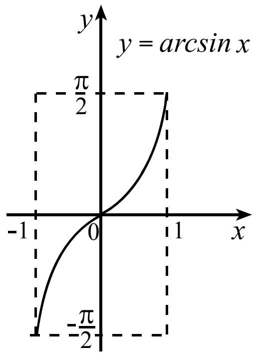


Рис. 9

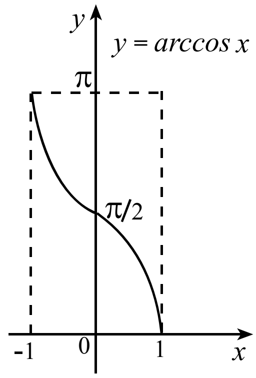
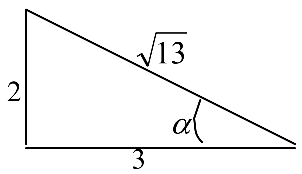


Рис. 10

Пример 16. Найдите значение выражения $2\sqrt{13}\cos\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

♦ Многих учащихся задача ставит в тупик.

Так как $\frac{2}{3} > 0$, то $\alpha = arctg\frac{2}{3}$ - это “угол” в треугольнике, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$, т. е. противолежащий катет относится к прилежащему как 2:3. Построим треугольник с катетами 2 и 3.



По теореме Пифагора находим гипотенузу. Теперь находим

$\cos arctg\frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2\sqrt{13}\cos arctg\frac{2}{3} = 6 \Rightarrow$ **Ответ:** 6.♦

Пример 17. (МИФИ). Найти наибольшее значение $f(x)=arctg(\sin 11x)+arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)$ и x, при которых оно достигается.

♦ $-1\le \sin 11x\le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4}=arctg(-1)\le arctg(\sin 11x)\le arctg(1)=\frac{\pi}{4}$,

$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\cos 2x\le\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\pi}{6}=arcctg\sqrt{3}\le arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)\le$

$arcctg(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$.

Поэтому $-\frac{\pi}{12}\le arctg(\sin 11x)+arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)\le\frac{13\pi}{12}$, при этом

$f_{\max}(x)=\frac{13\pi}{12}$, если $\begin{cases}\sin 11\,x=1,\\ \cos 2\,x=-1.\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ \sin 11\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\equiv(-1)^{11k}\sin\frac{3\pi}{2}\equiv-(-1)^{11k}=1\Leftrightarrow k=2n-1, n\in Z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=2\pi n-\frac{\pi}{2}, n\in Z\Rightarrow$ **Ответ:** $f_{\max}(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\frac{13\pi}{12}$. ♦

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Элементарные тригонометрические уравнения

1. $\sin x=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|a|>1,\\ \varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}|a|\le 1,\\ x=(-1)^n\arcsin a+\pi n, n\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$

2. $\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$
3. $tgx = a \Leftrightarrow x = arctga + \pi n, n \in Z.$
4. $ctgx = a \Leftrightarrow x = arcctga + \pi n, n \in Z.$

Пример 18. $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к.

$$\frac{1-\sqrt{10}}{2} = \frac{1-3,\dots}{2} = -1,\dots < -1.$$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. Во многих случаях тригонометрическое уравнение удается преобразовать к виду $f(\sin mx) = 0$ (или $f(\cos mx) = 0$, или $f(tgx) = 0$). Затем надо решить уравнение $f(t) = 0,$ где $t = \sin mx,$ и для корней t_k, по модулю не больше 1, решить элементарные тригонометрические уравнения $\sin mx = t_k$.

Это заведомо можно сделать в следующих случаях.

$$F\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(1 - \cos^2 x, \cos^2 x, \cos x\right) = 0.$$

Например,

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \cos x = d \Leftrightarrow a\left(1 - \cos^2 x\right) + b \cos^2 x + c \cos x = d$$
$$\Leftrightarrow (b - a)\cos^2 x + c \cos x = d - a.$$
$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x = d \quad a \sin^2 x + b\left(1 - \sin^2 x\right) + c \sin x = d$$
$$(a - b)\sin^2 x + c \sin x = d - b$$

2. Уравнение, однородное относительно $\cos kx, \sin mx$.

Уравнение $F(\sin mx, \cos kx) = 0$ называется однородным степени n относительно $\cos kx, \sin mx$, если

$$F(t \sin mx, t \cos kx) = t^n F(\sin mx, \cos kx).$$

Это уравнение приводится к уравнению с одним неизвестным заменой переменных $t=\dfrac{\cos kx}{\sin mx}$ (или $t=\dfrac{\sin mx}{\cos kx}$), где предварительно проверяется, не является ли решением $\sin mx=0$ (или $\cos kx=0$). Уравнение $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x=0$ является однородным степени 2, т. к. $a(t\cos x)^2+b(t\sin x)^2+c2(t\sin x)(t\cos x)\equiv t^2\left(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x\right)$.

Пример 19. $2\cos^2 x-3\cos x\cos 2x+\cos^2 2x=0.$

◆ $2\cos^2 x-3\cos x\cos 2x+\cos^2 2x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\cos 2x,\\ 2\cos x=\cos 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=0,\\ 2\cos^2 x-2\cos x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2}=k\pi,\\ \dfrac{x}{2}=n\pi,\\ \cos x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2k\pi}{3},\\ x=2n\pi,\\ x=\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n,k\in Z.\end{array}\right.$$

а) Однородное квадратное относительно $\cos x,\sin x$ уравнение

$$a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x=0.$$

Если коэффициент при $\cos^2 x$ отличен от 0, т. е. $a\neq 0$, то уравнение можно разделить на $\sin^2 x$: $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x=0\Leftrightarrow$ $a\cos^2 x+b\sin^2 x+2c\sin x\cos x=0\Leftrightarrow b\cdot ctg^2 x+2c\cdot ctgx+b=0$.

Если коэффициент при $\sin^2 x$ отличен от 0, т. е. $b \neq 0$, то уравнение можно разделить на $\cos^2 x$: $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$ $a\cos^2 x + b\sin^2 x + 2c\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow b\cdot tg^2 x + 2c\cdot tgx + a = 0$.

б) Неоднородное квадратное относительно $\cos x, \sin x$ уравнение $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, заменим d выражением $d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$ и придем к уравнению предыдущего типа:

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-d)\cos^2 x + (b-d)\sin^2 x + c\sin x\cos x = 0.$$

Например, если $b - d \neq 0$, то

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d \equiv d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-d)\cos^2 x + (b-d)\sin^2 x + c\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-d)tg^2 x + c\cdot tgx + (a-d) = 0.$$

Пример 20 (МГУ, 1995, ф-т почв.) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0$ не имеет решений.

♦ $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 y - 1 + 4a\cos y + 2a^2 + 1 \Leftrightarrow 2(\cos y + a)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos y = -a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ y \in \varnothing. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. ♦

Пример 21. (МГУ, 1991, химфак).

$$16\cos^4\frac{x}{4} + 6\sin^2\frac{x}{4} = 3\cos\frac{x}{2} + 12\cos^2\frac{x}{4}\cos 3x.$$

♦ $16\cos^4\frac{x}{4} + 6\sin^2\frac{x}{4} = 3\cos\frac{x}{2} + 12\cos^2\frac{x}{4}\cos 3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)^2+3\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=3\cos\frac{x}{2}+6\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}(1-3\cos 3x)+7-6\cos 3x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{-1+3\cos 3x\pm 3\sqrt{(\cos 3x+3)(\cos 3x-1)}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x-1\geq 0 \Leftrightarrow \cos 3x=1, \\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n \Rightarrow \cos 3\left(\pm\frac{2}{3}+4n\right)\pi\equiv 1,\ n\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z.$ ♦

3. Уравнение вида $\sin ax+\cos bx=0$ (аналогично $tgax+ctgbx=0$)

$$\sin ax+\cos bx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin ax+\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{(a-b)x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{(a+b)x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0.$$

Пример 22. ♦ $\sin 7x-\cos 19x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-19x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{13}, \\ \cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{\pi}{4}}{6}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{52}+\frac{k\pi}{13},\quad \frac{\pi}{12}+\frac{\pi(4k+1)}{24},\ k\in Z.$ ♦

4. Уравнения вида $a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = 0.$

Если $a \neq 0$, то $ab \neq 0.$

$a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = 0 \Leftrightarrow tgax = -\dfrac{b}{a},$ т.к. уравнение при $\cos ax = 0$ не имеет решений.

Пример 23. $4\sin 3x - 7\cos 3x = 0.$

♦ $4\sin 3x - 7\cos 3x = 0 \Leftrightarrow tg3x = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{arctg\dfrac{7}{4} + k\pi}{3}.$

Ответ: $x = \dfrac{arctg\dfrac{7}{4} + k\pi}{3}.$ ♦

5. Уравнения вида $\sin x + \cos x = a$

Первый способ.

$$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right| \leq 1, \\ x = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{a}{\sqrt{2}} + 2k\pi,\ k \in Z. \end{cases}$$

Второй способ.

$$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = a\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-1)\cos^2\dfrac{x}{2} + (a+1)\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0$ - однородное квадратное относительно $\cos\dfrac{x}{2}, \sin\dfrac{x}{2}$ уравнение.

Третий способ.

$$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)\cdot a \geq 0, \\ (\sin x + \cos x) = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)a \geq 0, \\ 2\sin x \cos x = a^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

6. Разложение на множители. Это самый распространенный метод решения тригонометрических уравнений.

а) Применение формул тригонометрии.

Пример 24 . (МГУ, 2001, биофак) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$

♦ $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \frac{1}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n, \quad \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k, n \in R.$ ♦

Применяя формулы тригонометрии, всегда надо помнить, что **не все формулы** тригонометрии **являются тождествами.**

Чтобы не пользоваться неравносильными переходами для тангенсов, лучше перейти сразу к синусам и косинусам.

б) Группировка слагаемых, применение формул (особенно часто используются формулы $\cos 2x$ в той или иной форме):

Пример 25. (МФТИ, 2001) Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x \cos x.$$

♦ $\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x \cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x\cos x\sin 3x+\sin^2 x\sin x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos 2x)(\sin 4x+\sin 2x)+(1-\cos 2x)(\sin 4x-\sin 2x)}{4\cos 2x}=$$

$$=3\sin 2x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sin 2x\cos 2x}{4\cos 2x}=3\sin 2x\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\left(\dfrac{1}{2}-\cos x\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2},\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\dfrac{k\pi}{2},\\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{k\pi}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.$ ♦

Пример 26. (МФТИ, 2002) Решите уравнение

$$\frac{3+\cos 4x-8\cos^4 x}{4(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{3+\cos 4x-2(1+\cos 2x)^2}{4(\cos x+\sin x)}\equiv$$

$$\equiv\frac{-4\cos 2x}{4(\cos x+\sin x)}\equiv\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x+\sin x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin^2 x-\sin x\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x+\sin x)=0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ **.**♦

в) Преобразование произведения в сумму, а затем в новое произведение.

Пример 27. Решите уравнение $\cos 14x\cos 15x=\cos 16x\cos 17x$.

◆ $\cos 14x \cos 15x = \cos 16 \cos 17 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 29x + \cos x) =$

$$= \frac{1}{2}(\cos 33x + \cos x) \Leftrightarrow -2\sin 31x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi n}{31}, \\ \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{\pi n}{31}, \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. ◆

7. $F(\sin 2x, (\sin x \pm \cos x)) = 0$.

Так как $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$, то удобнее сделать замену переменной $t = \sin x - \cos x$. Тогда $F(\sin 2x, \sin x - \cos x) \equiv F(1 - t^2, t) = 0$, т.е. получаем уравнение с одной переменной

$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

$t = \sin x + \cos x \Rightarrow F(\sin 2x, \sin x + \cos x) \equiv F(t^2 - 1, t) = 0$

8. Уравнение $F(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x, \cos 2x) = 0$, всегда можно привести к виду $f(\cos 2x) = 0$

9. Универсальная подстановка $t = tg\frac{x}{2}$, которая приводит уравнение $F(\sin x, \cos x) = 0$ к уравнению с одним переменным.

$$F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}=0, \\ F\left(0,-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=0; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}\neq 0, \\ F\left(\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot 2tg\dfrac{x}{2},\cos^2\dfrac{x}{2}\left(1-tg^2\dfrac{x}{2}\right)\right)=0\Leftrightarrow F\left(\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}},\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}\right)=0\Leftrightarrow f\left(tg\dfrac{x}{2}\right)=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

10. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=c$, $ab\neq 0$.Введение вспомогательного угла

Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно решить с помощью универсальной тригонометрической подстановки: $a\sin x+b\cos x=c\Leftrightarrow$

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2a\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+(b-c)\cos^2\dfrac{x}{2}-(b+c)\sin^2\dfrac{x}{2}=0$ - однородное уравнение степени 2.

Но в некоторых задачах такая замена не очень удачна.

Рассмотрим выражение $a\sin x+b\cos x$, умножим и разделим его на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$y(x)=a\sin x+b\cos x\equiv\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Заметим, что

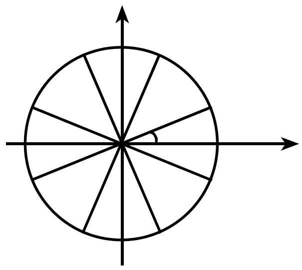
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\equiv 1.$$

Поэтому точки с координатами

$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

$\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,



$\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежат единичной окружности (всего восемь точек), и каждая пара координат может быть принята за косинус и синус соответствующего угла.

При этом всегда найдутся две пары положительных чисел, а, значит, угол в первой четверти, который может быть записан в виде любого "арка".

При необходимости или желании можно выбрать любую пару, преобразовав соответственно заданное выражение.

Положим, например,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

Тогда заданное выражение $y(x) = a\sin x + b\cos x$ примет вид $y(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, т. к.

$$y(x) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) \equiv \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+x).$$

Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет **простейший вид**

$$\sin(\alpha+x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 29. (МИФИ) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a-3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$.

♦ ОДЗ: $a \le 1$.

$a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}}\sin 3x+\frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2-3a+3}}\cos 3x=\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x+\alpha)=\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}},$$

где $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2-3a+3}}$.

Функция $f(x)=\sin(3x+\alpha)$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, поэтому ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$ может быть только тогда, если

$$\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}=\quad \pm 1\Leftrightarrow \pm\sqrt{a^2-3a+3}=2a-3\Leftrightarrow a^2-3a+2=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l}1,\\2.\end{array}\right.\Rightarrow a=1$, и это значение не принимается ни на одном из концов отрезка $[-\pi;\pi]$. Проверим это.

$a=1:\ a\sin 3x+\sqrt{3(1-a)}\cos 3x=2a-3\Leftrightarrow$

$\sin 3x=-1\Rightarrow \sin(-3\pi)=\sin 3\pi=0\neq\pm 1.$

Ответ: 1.♦

11. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Пример 30. (МФТИ, 2001) $tgx+tg3x=4|\sin x|$.

♦ ОДЗ: $\cos x\cos 3x\neq 0.$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x\cos 3x}=\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 3x}=4|\sin x|\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x=|\sin x|\cos 3x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \sin x(\cos 2x - \cos 3x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \\ \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \cos 2x - \cos 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \end{array}\right. \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos 2x + \cos 3x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \sin\dfrac{5x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2\pi k}{5}, \\ 2\pi k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \\ \sin x < 0, \\ \cos\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi(2n+1)}{5}, \\ \pi(2k+1). \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{5} : \cos\frac{2\pi k}{5} \ne 0, \cos\frac{6\pi k}{5} \ne 0, \sin\frac{2\pi k}{5} \ge 0 \Rightarrow k = \left[\begin{array}{l} 5n, \\ 5n+1, \\ 5n+2. \end{array}\right.$$

$$x = \frac{\pi(2n+1)}{5} : \cos\frac{\pi(2n+1)}{5} \ne 0 \Rightarrow \cos\frac{6\pi(2n+1)}{5} \ne 0, \sin\frac{\pi(2n+1)}{5} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}\right) < 0 \Rightarrow n = \left[\begin{array}{l} 5k+3, \\ 5k+4. \end{array}\right.$$

$$x=\left[\begin{array}{l}\pi k,\\ \dfrac{2\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{4\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{7\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{9\pi}{5}+2\pi k.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\pi k,\\ \dfrac{2\pi}{5}+\pi k,\\ \dfrac{4\pi}{5}+\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi k, \dfrac{2\pi}{5}+\pi k, \dfrac{4\pi}{5}+\pi k, k\in Z$. ♦

12. Нестандартные уравнения

Пример 31. Решите уравнение $\sin^8 x-\cos^5 x=1$.

♦ $\sin^8 x-\cos^5 x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^8 x-\cos^5 x=\sin^2 x+\cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1-\sin^6 x\right)+\cos^2 x\left(1+\cos^3 x\right)=0 \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 x=0,\\ \cos^2 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;\\ \begin{cases}\sin^2 x=0,\\ 1+\cos^3 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\pi(2n+1), n\in Z;\\ \begin{cases}\sin^6 x=1,\\ \cos^2 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\\ \begin{cases}\sin^6 x=1,\\ \cos^3 x=-1;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi(2n+1), \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. ♦

Контрольные вопросы

1(3). Имеет ли функция $y=\dfrac{3x-1}{4x+5}$ обратную? Если нет или да, то объясните, почему. Если да, то найдите ее.

2(3). Имеет ли функция $y=\sin 3x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ обратную? Если нет или да, то объясните, почему. Если да, то найдите ее.

3(2). (ЕГЭ,2005, В8) Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(2x+1)(x-2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=0$?

4(2). (ЕГЭ,2005, В8) Найдите значение функции

$$y=\frac{3f(x)-2f(-x)}{2g(x)-3g(-x)}$$

в точке x_0, если известно, что функция $y=f(x)$ четная, функция $y=g(x)$ нечетная, $f(x_0)=5$, $g(x_0)=1$.

5(2). Найдите значение выражения $\cos\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{13}\right)$.

6(3). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3\sin 17x-\cos 17x-3$.

7(4). Найдите положительный период, меньший, чем π, для функции $f(x)=\sin 7x-\cos^2(4{,}5x)$.

8(3). Найдите множество значений функции $y=\sin 4x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right]$.

9(3). Найдите все x, для которых функция

$y(x) = 8\cos^2 x + 4\sin x - 2$ принимает наибольшее значение.

10(3. Решите уравнение

$$\cos x + \sin x + 1 = 0.$$

11(3). Решите уравнение

$$\cos 2x - \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{6}.$$

12(3). Решите уравнение

$$\sin^2 x - 3\cos x \sin x + 2\cos^2 x = 0.$$

Задачи

1(3). Решите уравнение

$$2\sin^2 x - \sin x \cos 2x - \cos^2 2x = 0.$$

2(3). Решите уравнение

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5\mathrm{tg}2x + 7.$$

3(3). Решите уравнение

$$2\sin^3 x = \cos x.$$

4(3). Найдите наибольшее значение функции

$$\sin^2 y - 4\sin y \cos y + 4\cos^2 y.$$

5(3). Решите уравнение

$$\sin 7t = \sin 5t.$$

6(3). Решите уравнение

$$\sin x + \cos 4x = \cos 2x - \sin 5x.$$

7(3). (МГУ, 2006, химфак) Решите уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x.$$

8(3). Решите уравнение

$$2\sin^3 x + \cos^2 2x = \sin x.$$

9(3). Решите уравнение

$$2\sin 2x - \cos 2x = 2\sqrt{2}\sin x.$$

10(3). Решите уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

11(3). Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg} x = 4 - 4\mathrm{ctg}^2 x - 2\mathrm{ctg} x.$$

12(3). Решите уравнение

$$2\mathrm{tg}^2 x + 2\cos 2x = 5.$$