Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Квадратные уравнения

Задание №4 для 8-х классов

(2006-2007 учебный год)

г. Долгопрудный, 2007

Составитель: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 8-х классов (2006-2007) учебный год). - М.: МФТИ, 2007, 28с.

Составитель:
Яковлева Тамара Харитоновна
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 29.03.07
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75
Уч.-изд. л. 1,55. Тираж 1500. Заказ №16-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Введение

Решение многих задач сводится к решению уравнений. Уже во втором тысячелетии до новой эры решали линейные и некоторые квадратные уравнения в Древнем Египте. Более сложные задачи решали в Древнем Вавилоне.

Один из первых дошедших до нас выводов формул для корней квадратного уравнения принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.). Среднеазиатский ученый аль-Хорезми (IX век) в трактате «Китаб аль-джеб валь-мукабала» получил формулу для корней методом выделения полного квадрата.

Затем в работах европейских математиков XIII-XVI в.в. даются отдельные методы решения различных квадратных уравнений. Слияние этих методов и общее правило произвел М. Штифель в 1544 году. Близкое к современному решение квадратного уравнения принято у Р. Бомбелли (1579 г.) и С. Стевина (1585 г.). Термин «квадратное уравнение» ввел Х. Вольф в 1710 году.

§1. Уравнения и правила их преобразований

Уравнением с переменной x называется равенство двух выражений

$$f(x)=g(x). \qquad (1)$$

Например, $x^2+1=x-3$, $x^2-1=0$, $|x|-3=0$, $\dfrac{2x-3}{x+3}=x+1$.

Число a называется *корнем* (или *решением*) данного уравнения с переменной x, если при подстановке числа a в обе части этого уравнения получается верное равенство, т. е. если при $x=a$ обе части уравнения определены и их значения совпадают.

Например, уравнение $2x^2=0$ имеет единственное решение $x=0$, а уравнение $x^2+3=0$ не имеет решений, т. к. $x^2+3>0$ при любом значении переменной x.

Уравнение $(x-1)(x+2)=0$ имеет только два решения $x=1$ и $x=-2$. При любом x, отличном от 1 и -2, левая часть отлична от нуля, следовательно, других решений, кроме 1 и -2, уравнение не имеет.

Решениями уравнения $\dfrac{x-1}{x-1}=1$ являются все числа, кроме $x=1$. Число 1 не является решением уравнения, т. к. при $x=1$ не определена левая часть уравнения. Это уравнение имеет бесконечно много решений.

Уравнению $2x=2x$ удовлетворяют все действительные числа, а уравнению $|x|=x$ удовлетворяют все неотрицательные числа.

Решить данное уравнение – значит найти **все** его корни (решения) или доказать, что их нет.

Два уравнения называются *равносильными,* если они имеют одно и то же множество решений, т. е. если каждое решение первого уравнения является решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения является решением первого уравнения, или если оба уравнения не имеют решений.

Например, уравнения $3x-1=5$ или $(x-2)^2=0$ являются равносильными, т. к. каждое из них имеет единственное решение $x=2$. Уравнения $(x-1)(x-2)=0$ и $(x-1)^2=0$ не являются равносильными, т. к. число 2 является решением первого уравнения и не является решением второго.

Сформулируем несколько правил преобразования уравнений, широко используемых при решении уравнений.

Правило 1. Если выражение $y(x)$ определено при всех значениях x, при которых определены выражения $f(x)$ и $g(x)$, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)+y(x)=g(x)+y(x)$ равносильны. В частности, равносильны уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)-g(x)=0$.

На основании этого правила любое слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, после этого получается уравнение, равносильное данному.

Правило 2. Если выражение $y(x)$ определено для всех x, для которых определены выражения $f(x)$ и $g(x)$, то любое решение уравнения $f(x)=g(x)$ является решением уравнения $f(x)\cdot y(x)=g(x)\cdot y(x)$.

Если, кроме того, $y(x)\neq 0$ для всех x, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\cdot y(x)=g(x)\cdot y(x)$ равносильны.

Правило 3. Каждое решение уравнения $f(x)=g(x)$ является решением уравнения $(f(x))^n=(g(x))^n$ при любом натуральном n.

Правило 4. Каждое решение уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$ является решением, по крайней мере, одного из уравнений $f(x)=0$ или $g(x)=0$.

§2. Линейное уравнение

Уравнение вида

$$ax=b, \qquad (2)$$

где a и b – некоторые заданные действительные числа, называется *линейным уравнением*.

Если $a\neq 0$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x=\frac{b}{a}$.

Если $a=0$, а $b\neq 0$, то уравнение (2) не имеет решений.

Если $a=0$ и $b=0$, то решением этого уравнения является любое действительное число.

Пример 1. Решите уравнение

а) $2x+5=3x+2;$

б) $2(x+3)=x+(x+3);$

в) $3(x+1)+5=2x+(x+8).$

а) Перенесем слагаемое $3x$ в левую часть уравнения, а слагаемое 5 в правую, при этом меняем их знаки: $2x-3x=2-5.$

Это уравнение имеет единственное решение $x=3,$ следовательно, исходное уравнение также имеет единственное решение.

б) Раскрываем скобки и переносим слагаемые, содержащие $x,$ из правой части уравнения в левую часть, а слагаемое 6 – в правую часть уравнения, при этом не забываем поменять знаки этих слагаемых, в результате получаем: $2x-2x=3-6.$ Данное уравнение равносильно уравнению $0\cdot x=-3,$ которое не имеет решений, следовательно, исходное уравнение также не имеет решений.

в) Преобразуем данное уравнение: $3x+8=3x+8.$ Любое действительное число удовлетворяет полученному уравнению, следовательно, и данному уравнению удовлетворяет любое действительное число.

Пример 2. Выясните, какие из ниже приведенных уравнений являются равносильными:

а) $2x+1=7x-9$ и $3(2x+1)=7x+1;$

б) $3x+5=x+7$ и $2x-(x+3)=x-1.$

а) Первое уравнение равносильно уравнению $2x-7x=-1-9,$ его решением является число $x=2.$ Второе уравнение равносильно уравнению $6x-7x=-3+1,$ его решением является единственное число $x=2.$ Следовательно, данные уравнения равносильны.

б) Единственным решением первого уравнения является число $x=1.$ Второе уравнение равносильно уравнению $0\cdot x=2,$ которое не имеет решений. Следовательно, данные уравнения не являются равносильными.

§3. Квадратные уравнения

Уравнения вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{3}$$

где x – переменное, a, b, c – некоторые действительные числа, причем $a\neq 0,$ называется *квадратным уравнением.*

Уравнения $ax^2+bx=0$ и $ax^2+c=0$ при $a\neq 0$ называются *неполными квадратными уравнениями.*

Уравнение $ax^2 + bx = 0$ при $a \neq 0$ преобразуется к виду $x(ax + b) = 0,$ отсюда следует, что решениями полученного уравнения являются числа $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}.$

Уравнение $ax^2 + c = 0$ при $a \neq 0$ равносильно уравнению

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Отсюда следует, что при $c = 0$ уравнение имеет единственное решение $x = 0.$ Если $\frac{c}{a} > 0,$ то уравнение не имеет решений, т. к. $x^2 + \frac{c}{a} \geq \frac{c}{a},$ т. е. при любых x левая часть уравнения не обращается в нуль. Если $\frac{c}{a} < 0,$ то уравнение приводится у виду $\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0,$ откуда следует, что оно имеет два решения, а именно, $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

Пример 1. Решите уравнение:

а) $5x^2 = 0;$ б) $6x^2 - 5x = 0;$

в) $3x^2 + 2 = 0;$ г) $4x^2 - 9 = 0.$

а) Уравнение имеет одно решение $x = 0.$

б) Уравнение приводится к виду $x(6x - 5) = 0,$ откуда следует, что оно имеет два решения: $x = 0$ и $x = \frac{5}{6}.$

в) Уравнение не имеет решений, т. к. левая часть уравнения при любом значении x больше или равна $2.$

г) Преобразуем уравнение к виду $(2x - 3)(2x + 3) = 0,$ откуда следует, что уравнение имеет два решения: $x = \frac{3}{2}$ и $x = -\frac{3}{2}.$

Рассмотрим теперь уравнение (3), где числа a, b и c отличны от нуля. Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \qquad (4)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения (3) и обозначают буквой D.

Если $D \ge 0,$ то выражение (4) можно разбить на множители

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

Введем обозначения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения (3).

Формулу (5) для нахождения корней уравнения (3) обычно записывают одной формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (7)$$

Если $D = 0,$ то $x_1 = x_2,$ т. е. корни уравнения совпадают, и уравнение (3) приводится к виду $a(x - x_1)^2 = 0.$

Если $D < 0,$ то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} \ge -\frac{D}{4a^2} > 0$ для любого $x,$ поэтому в этом случае уравнение (3) не имеет корней.

Пример 2. Решите квадратное уравнение:

а) $2x^2 + 3x - 5 = 0;$ б) $3x^2 + 4x + 2 = 0;$

в) $9x^2 - 6x + 1 = 0;$ г) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0.$

а) Сначала найдем дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49.$$

Так как $D = 49 > 0,$ то по формуле (7) находим:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}.$$

Следовательно, данное уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{5}{2}.$

б) Так как $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0,$ то данное уравнение не имеет действительных корней.

в) Так как $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0,$ то данное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$

г) $D = 3 - 4 \cdot \sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\right) = 11.$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \text{ и } x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2\sqrt{2}}.$$

Если в уравнении (3) число $b = 2b_1$, то формула (7) принимает вид

$$x = \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}. \qquad (8)$$

В формуле (8) число b_1 равно половине коэффициента при x в уравнении (3).

Выражение $b_1^2 - ac$ обозначают через D_1. Следовательно, корни квадратного уравнения $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ определяются по формуле

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ если } D_1 = b_1^2 - ac \geq 0.$$

Пример 3. Решите квадратное уравнение:

а) $3x^2 - 4x - 1 = 0;$ б) $2x^2 + 2x + 5 = 0.$

а) $D_1 = 2^2 - 3(-1) = 7 > 0.$ По формуле (8) имеем:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}, \text{ т. е. } x_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \text{ и } x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}.$$

б) $D_1 = 1^2 - 2 \cdot 5 = -9 < 0.$ Уравнение не имеет решений.

Пример 4. Определить, какие из ниже приведенных уравнений являются равносильными:

а) $6x^2 + x - 1 = 0$ и $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0,$

б) $2x - 6 = 0$ и $x^2 - 6x + 9 = 0,$

в) $x^2 + x + 1 = 0$ и $x^2 - x + 1 = 0,$

г) $x + 1 = 0$ и $2x^2 + x - 1 = 0.$

а) Первое уравнение имеет два решения:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12};\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Эти и только эти числа являются корнями второго уравнения, следовательно, данные уравнения равносильны.

б) Первое уравнение имеет одно решение $x = 3$. Второе уравнение приводится к виду $(x-3)^2 = 0$, т. е. тоже имеет только одно решение $x = 3$. Следовательно, данные уравнения равносильны.

в) Для обоих уравнений дискриминант равен $1 - 4 = -3 < 0$, следовательно, оба уравнения не имеют решений, а потому они равносильны.

г) Первое уравнение имеет одно решение $x = -1$, а второе уравнение имеет два решения $x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$. Число $\frac{1}{2}$ является решением второго уравнения и не является решением первого уравнения. Следовательно, данные уравнения не равносильны.

Пример 5. Найдите все простые p и q такие, что уравнение $x^2 - px - q = 0$ имеет простой корень.

Предположим, что $x = n$ является простым корнем, тогда выполняется условие $n^2 - pn - q = 0$, откуда следует, что $q = n(n - p)$. Так как число q простое и n простое, то $n - p = 1$, т. е. $n = p + 1, q = p + 1$. Число p может равняться только 2, т. к. в любом другом случае $p + 1$ будет четным, и тогда число q не будет простым числом.

Следовательно, искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b, c – числа, причем $a \neq 0$, называется квадратным трехчленом. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c$ имеет различные корни x_1 и x_2, то квадратный трехчлен раскладывается на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, а если корни совпадают, то квадратный трехчлен представим в виде $a(x - x_1)^2$. Если же уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то квадратный трехчлен не раскладывается на множители.

Пример 6. Разложите на множители квадратный трехчлен

$$21x^2 - 4x - 1.$$

Решаем квадратное уравнение $21x^2 - 4x - 1 = 0,\ D_1 = 4 + 21 = 25,$

$$x = \frac{2 \pm 5}{21},\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{1}{7}.$$

Отсюда следует, что $21x^2-4x-1=21\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right).$

Пример 7. Сократите дробь $\dfrac{24x^2+x-10}{56x^2-59x+15}.$

Разложим на множители числитель дроби, для этого решаем квадратное уравнение $24x^2+x-10=0,\ D=1+960=961=31^2,\ x=\dfrac{-1\pm 31}{48},$

$$x_1=\frac{30}{48}=\frac{5}{8},\ x_2=-\frac{2}{3},\ 24x^2+x-10=24\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

Теперь решим уравнение $56x^2-59x+15=0,\quad D=59^2-4\cdot 56\cdot 15=$ $=3481-3360=121=11^2,\quad x=\dfrac{59\pm 11}{112},\quad x_1=\dfrac{70}{112}=\dfrac{5}{8},\quad x_2=\dfrac{48}{112}=\dfrac{3}{7},$ следовательно, $56x^2-59x+15=56\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right).$

Получаем: $\dfrac{24x^2+x-10}{56x^2-59x+15}=\dfrac{24\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{56\left(x-\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{3}{7}\right)}=\dfrac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{7\left(x-\frac{3}{7}\right)}=\dfrac{3x+2}{7x-3}.$

Пример 8. а) Найти наименьшее значение квадратного трехчлена

$$3x^2-5x+1;$$

б) Найти наибольшее значение квадратного трехчлена

$$-7x^2+3x+5.$$

а) Преобразуем данный квадратный трехчлен, пользуясь методом выделения квадрата двучлена:

$$3x^2-5x+1=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+1=3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}\cdot x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)+1=$$

$$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{3\cdot 5^2}{6^2}+1=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}+1=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}.$$

Отсюда видно, что при $x=\dfrac{5}{6}$ квадратный трехчлен принимает значение $\left(-\dfrac{13}{12}\right)$, а для любого $x\neq\dfrac{5}{6}$ к числу $-\dfrac{13}{12}$ будет прибавляться положительное число, равное $3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2$, следовательно, число $-\frac{13}{12}$ является наименьшим значением данного квадратного трехчлена.

б) Выделяем квадрат двучлена, получаем:

$$-7x^2+3x+5=-7\left(x^2-\frac{3}{7}x\right)+5=-7\left(x^2-2\cdot\frac{3}{14}\cdot x+\left(\frac{3}{14}\right)^2-\left(\frac{3}{14}\right)^2\right)+5=$$

$$=-3\left(x-\frac{3}{14}\right)^2+7\cdot\frac{9}{14^2}+5=-7\left(x-\frac{3}{14}\right)^2+\frac{9}{28}+5=-7\left(x-\frac{3}{14}\right)^2+5\frac{9}{28}.$$

При $x=\frac{3}{14}$ квадратный трехчлен будет принимать значение, равное $5\frac{9}{28}$, при $x\neq\frac{3}{14}$ из числа $5\frac{9}{28}$ будет вычитаться число $7\left(x-\frac{3}{14}\right)^2$, поэтому число $5\frac{9}{28}$ является наибольшим значением данного квадратного трехчлена.

§4. Теорема Виета. Приведенное квадратное уравнение

Найдем сумму и произведение корней квадратного уравнения (3). Из формулы (5) получаем:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{\left(-b+\sqrt{D}\right)\left(-b-\sqrt{D}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Откуда следует утверждение, которое *называют теоремой Виета:* если корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ существуют, то сумма корней квадратного уравнения равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$.

Например, для квадратного уравнения $2x^2-3x-5=0$ корни существуют, т. к. $D=9+4\cdot2\cdot5=49>0.$ По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна $\frac{3}{2}$, а произведение корней равно $-\frac{5}{2}$.

Пример 1. Не решая квадратное уравнение, найдите сумму квадратов корней квадратного равнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0, b^2-4ac>0.$

Из теоремы Виета следует, что $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. Преобразуем выражение $x_1^2+x_2^2$.

Имеем: $x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$

Отсюда следует, что $x_1^2+x_2^2=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}.$

Уравнение $x^2+px+q=0$ называется *приведенным квадратным уравнением.* В этом уравнении коэффициент при x^2 равен 1. Формула корней для приведенного квадратного уравнения принимает такой вид:

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ или } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения звучит так: если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0,$ то справедливы формулы $x_1+x_2=-p, x_1\cdot x_2=q.$

Обратная теорема Виета: если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p,$ а $x_1\cdot x_2=q,$ то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0.$

Для доказательства подставим в уравнение $x^2+px+q=0$ вместо p выражение $-(x_1+x_2),$ а вместо q выражение $x_1x_2,$ тогда получаем $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=(x-x_1)(x-x_2),$ откуда следует, что числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0.$

Пример 2. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{3}{7}$.

Из обратной теоремы Виета следует, что данные числа являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{7}\right)x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{7}=0,$ т. е. уравнения $x^2-\dfrac{13}{14}x+\dfrac{3}{14}=0.$

Заметим, что данные числа являются и корнями квадратного уравнения $14x^2-13x+3=0$, которое получается из предыдущего умножением обеих частей уравнения на 14.

Пример 3. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2+6x+q=0$ удовлетворяют условию $x_2=2x_1$. Найдите q, x_1, x_2.

Из теоремы Виета следует, что $x_1+x_2=3x_1=-6$, т. е. $x_1=-2$ и $x_2=2x_1=-4$. Тогда $q=x_1x_2=8$.

Пример 4. Не решая уравнение $2x^2-3x-9=0$, найдите $\dfrac{x_2}{1+x_1}+\dfrac{x_1}{1+x_2}$, где x_1 и x_2 – его корни.

Преобразуем выражение:

$$\frac{x_2}{1+x_1}+\frac{x_1}{1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)+x_2^2+x_1^2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{(x_2+x_1)+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}.$$

По теореме Виета $x_1+x_2=\dfrac{3}{2}$ и $x_1x_2=-\dfrac{9}{2}$. Поэтому имеем:

$$\frac{\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{9}{2}\right)}{1+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+9}{-2}=-\frac{51}{8}.$$

Пример 5. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+13x-17=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являлись бы числа $2-x_1$ и $2-x_2$.

По теореме Виета $x_1+x_2=-13$ и $x_1x_2=-17$. Сумма чисел $2-x_1$ и $2-x_2$ равна $4-(x_1+x_2)=4+13=17$, а произведение этих чисел равно $(2-x_1)(2-x_2)=4-2(x_1+x_2)+x_1x_2=4-2(-13)-17=13$. Используя обратную теорему Виета, получим квадратное уравнение $x^2-17x+13=0$, корнями которого являются заданные числа.

Заканчивая этот параграф, хочется сказать, что знаменитый французский математик Франсуа Виет родился в 1540 году в небольшом городке Фантанеле-Конт на юге Франции. Свою знаменитую теорему, которую мы знаем под названием теоремы Виета, он доказал в 1591 году, сейчас эта теорема входит в школьные программы. Люди пользуются этой теоремой уже пятое столетие. Франсуа Виет обладал огромной трудоспособностью, он мог работать по трое суток без отдыха, многие его результаты и открытия достойны восхищения.

§5. Решение уравнений, приводящихся к квадратным

Уравнение
$$ax^4+bx^2+c=0,$$
где a,b,c – некоторые действительные числа, причем $a\neq 0,$ называется *биквадратным уравнением.* Заменой $u=x^2$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $au^2+bu+c=0.$

Пример 1. Решите биквадратное уравнение

а) $2x^4-3x^2+1=0;$ б) $5x^4-7x^2-6=0;$ в) $7x^4+9x^2+2=0.$

а) Сделаем замену $u=x^2,$ получим квадратное уравнение
$$2u^2-3u+1=0.$$
По формуле корней квадратного уравнения находим
$$u=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4},\text{ т. е. } u_1=1, u_2=\frac{1}{2}.$$
Отсюда следует, что $x^2=1$ и $x^2=\frac{1}{2},$ и поэтому данное уравнение имеет четыре решения: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}, x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

б) После замены $u=x^2$ получаем уравнение $5u^2-7u-6=0.$ Находим корни квадратного уравнения:
$$u=\frac{7\pm\sqrt{49+4\cdot 5\cdot 6}}{10}=\frac{7\pm 13}{10},\text{ т. е. } u_1=2, u_2=-\frac{3}{5}.$$
Уравнение $x^2=2$ имеет два корня: $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}.$ Уравнение $x^2=-\frac{3}{5}$ не имеет решений. Следовательно, данное биквадратное уравнение имеет два решения: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}.$

в) Уравнение не имеет решений, т. к. $7x^4+9x^2+2\geq 2$ для любого $x\in\mathbb{R}.$

Пример 2. Решите уравнение
$$\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{5x+4}{(x-1)(2x+1)}.$$
Общий знаменатель дробей, входящих в данное уравнение, равен $(x-1)(2x+1).$ Умножив обе части уравнения на $(x-1)(2x+1),$ получим

$$(2x+1)^2+(x+1)(x-1)=5x+4,\ 4x^2+4x+1+x^2-1=5x+4,$$
$$5x^2-x-4=0.$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{1\pm 9}{10},\ \text{т. е. } x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{5}.$$

При $x=1$ не определены обе части уравнения, следовательно, это число не является корнем уравнения. При $x=-\frac{4}{5}$ общий знаменатель в нуль не обращается, следовательно, это число является решением данного уравнения.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=4+2x+x^2.$$

Введем новую переменную $x^2+2x+3=t,$ тогда для нахождения t получим уравнение $\frac{t+4}{t}=t+1.$ Умножим обе части этого уравнения на $t,$ получим: $t+4=t^2+t,\ t^2=4,\ t_1=2,\ t_2=-2.$

Решаем уравнение:

$$x^2+2x+3=2,\ x^2+2x+1=0,$$

оно имеет единственное решение $x=-1.$ Уравнение $x^2+2x+3=-2,$ т. е. $x^2+2x+5=0,$ решений не имеет. Следовательно, исходное уравнение имеет одно решение $x=-1.$

Пример 4. Решите уравнение

$$(x+2)^2+\frac{24}{x^2+4x}=18.$$

Введем новую переменную $t=(x+2)^2.$

Так как $x^2+4x=x^2+4x+4-4,$ то $x^2+4x=t-4,$ и для нахождения t получаем уравнение $t+\frac{24}{t-4}=18.$ Умножив обе части уравнения на $t-4,$ получим: $t^2-4t+24=18t-72,\ t^2-22t+96=0.$ Корнями этого квадратного уравнения являются числа 6 и $16.$ Решаем уравнение $(x+2)^2=16,$ и из него следует, что $x+2=\pm 4,$ т. е. $x_1=2$ и $x_2=-6.$

Теперь решаем уравнение $(x+2)^2=6,$ откуда следует, что

$$x_3 = -2 + \sqrt{6} \text{ и } x_4 = -2 - \sqrt{6}.$$

Пример 5. Решите уравнение

$$\frac{3x}{3x^2 - 5x + 6} - \frac{4x}{3x^2 + x + 6} = \frac{7}{20}.$$

Заметим, что число $x = 0$ не является решением данного уравнения.

Разделим числитель и знаменатель каждой из дробей, стоящих в левой части уравнения на x, тогда получаем: $\dfrac{3}{3x - 5 + \frac{6}{x}} - \dfrac{4}{3x + 1 + \frac{6}{x}} = \dfrac{7}{20}.$

Обозначим $3x + \dfrac{6}{x} = y$, тогда получаем уравнение для нахождения y:

$$\frac{3}{y-5} - \frac{4}{y+1} = \frac{7}{20},\ 20(3y + 3 - 4y + 20) = 7\left(y^2 - 4y - 5\right),$$

$$-20y + 460 = 7y^2 - 28y - 35,\ 7y^2 - 8y - 495 = 0,$$

$$D_1 = 16 + 7 \cdot 495 = 3481 = 59^2,\ y = \frac{4 \pm 59}{7},\ y_1 = 9,\ y_2 = -\frac{55}{7}.$$

Теперь решаем уравнение $3x + \dfrac{6}{x} = 9,\quad 3x^2 - 9x + 6 = 0,$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,\ x = \frac{3 \pm 1}{2},\ x_1 = 2,\ x_2 = 1.$$

Решаем уравнение $3x + \dfrac{6}{x} = -\dfrac{55}{7},$

$$21x^2 + 55x + 42 = 0,\ D = 55^2 - 4 \cdot 21 \cdot 42 = 3025 - 3582 < 0.$$

Ответ: 1; 2.

§6. Решение уравнений с модулями и параметрами

Рассмотрим несколько уравнений, в которых переменная x стоит под знаком модуля. Напомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решите уравнение:

а) $|x - 2| = 3$; б) $|x + 1| - |2x - 3| = 1$;

в) $\dfrac{|x+2|}{|x-1|}+x=1;$ г) $x^2-|x|=6;$ д) $6x^2-|x+1|=0.$

а) Если модуль числа равен 3, то это число равно либо 3, либо (-3), т. е. $x-2=3,\ x=5$ или $x-2=-3,\ x=-1.$

б) Из определения модуля следует, что $|x+1|=x+1,$ при $x+1\geq 0,$ т. е. при $x\geq -1$ и $|x+1|=-x-1$ при $x<-1.$ Выражение $|2x-3|$ равно $2x-3,$ если $x\geq\dfrac{3}{2},$ и равно $-2x+3,$ если $x<\dfrac{3}{2}.$

При $x<-1$ данное уравнение равносильно уравнению $-x-1-(-2x+3)=1,$ из которого следует, что $x=5.$ Но число 5 не удовлетворяет условию $x<-1,$ следовательно, при $x<-1$ данное уравнение решений не имеет.

При $-1\leq x<\dfrac{3}{2}$ данное уравнение равносильно уравнению $x+1-(-2x+3)=1,$ из которого следует, что $x=1;$ число 1 удовлетворяет условию $-1\leq x<\dfrac{3}{2}.$

При $x\geq\dfrac{3}{2}$ данное уравнение равносильно уравнению $x+1-(-2x-3)=1,$ которое имеет решение $x=3.$ А так как число 3 удовлетворяет условию $x\geq\dfrac{3}{2},$ то оно является решением уравнения.

в) Если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x-1}$ имеют одинаковые знаки, то дробь положительна, а если разные – то отрицательна, т. е.

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}, \text{ если } x\leq -2, \text{ если } x>1,\\ -\dfrac{x+2}{x-1}, \text{ если } -2<x<1.\end{cases}$$

При $x\leq -2$ и при $x>1$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x+2}{x-1}+x=1,\ \ x+2+x(x+1)=x-1,\ \ x^2-x+3=0.$$

Последнее уравнение не имеет решений.

При $-2 < x < 1$ данное уравнение равносильно уравнению

$$-\frac{x+2}{x-1} + x = 1,\ -x - 2 + x^2 - x = x - 1,\ x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Неравенствам $-2 < x < 1$ удовлетворяет число $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, следовательно, это число является решением уравнения.

г) При $x \geq 0$ данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - x - 6 = 0$, корнями которого являются числа 3 и -2. Число 3 удовлетворяет условию $x > 0$, а число -2 не удовлетворяет этому условию, следовательно, только число 3 является решением исходного уравнения. При $x < 0$ данное уравнение равносильно уравнению $x^2 + x - 6 = 0$, корнями которого являются числа -3 и 2. Условию $x < 0$ удовлетворяет число -3 и не удовлетворяет число 2.

д) При $x \geq -1$ данное уравнение равносильно уравнению $6x^2 - x - 1 = 0$, находим его корни: $x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Оба корня удовлетворяют условию $x \geq -1$, следовательно, они являются решениями данного уравнения. При $x < -1$ данное уравнение равносильно уравнению $6x^2 + x + 1 = 0$, которое не имеет решений.

Пусть заданы выражения $f(x,a)$ и $g(x,a)$, зависящие от переменных x и a. Тогда уравнение $f(x,a) = g(x,a)$ относительно переменной x называется *уравнением с параметром* a. Решить уравнение с параметром – это значит при любом допустимом значении параметра найти все решения данного уравнения.

Пример 2. Решите уравнение при всех допустимых значениях параметра a:

а) $ax^2 - 3 = 4a^2 - 2x^2$; б) $(a-3)x^2 = a^2 - 9$;

в) $(a-1)x^2 + 2(a+1)x + (a-2) = 0$.

а) При любом значении параметра a данное уравнение равносильно уравнению $(a+2)x^2 = 4a^2 + 3$. Если $a = -2$, то получаем уравнение $0 \cdot x^2 = 19$; это уравнение не имеет решений. Если $a \neq -2$, то

$x^2 = \dfrac{4a^2+3}{a+2}$. Выражение $4a^2+3>0$ для любого a; при $a>-2$ имеем два решения: $x_1 = \sqrt{\dfrac{4a^2+3}{a+2}}$ и $x_2 = -\sqrt{\dfrac{4a^2+3}{a+2}}$. Если $a+2<0$, то выражение $\dfrac{4a^2+3}{a+2}<0$, тогда уравнение не имеет решений.

Ответ: $x = \pm\sqrt{\dfrac{4a^2+3}{a+2}}$, при $a>-2$; при $a\le -2$ решений нет.

б) Если $a=3$, то $x\in\mathbb{R}$. Если $a\ne 3$, то $x^2 = a+3$. Если $a+3=0$, т. е. если $a=-3$, то уравнение имеет единственное решение $x=0$. Если $a<-3$, то уравнение не имеет решений. Если $a>-3$ и $a\ne 3$, то уравнение имеет два решения: $x_1=\sqrt{a+3}$ и $x_2=-\sqrt{a+3}$.

в) При $a=1$ данное уравнение принимает вид $4x-1=0$, число $x=\dfrac{1}{4}$ является его решением. При $a\ne 1$ данное уравнение является квадратным, его дискриминант D_1 равен

$$(a+1)^2-(a-1)(a-2)=5a-1.$$

Если $5a-1<0$, т. е. $a<\dfrac{1}{5}$, то данное уравнение не имеет решений.

Если $a=\dfrac{1}{5}$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=-\frac{a+1}{a-1}=\frac{\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{5}-1}=\frac{3}{2}.$$

Если $a>\dfrac{1}{5}$ и $a\ne 1$, то данное уравнение имеет два решения:

$$x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{5a-1}}{a-1}.$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{4}$ при $a=1;\ x=\dfrac{3}{2}$ при $a=\dfrac{1}{5};\ x=\dfrac{-(a+1)\pm\sqrt{5a-1}}{a-1}$ при $a>\dfrac{1}{5}$ и $a\neq 1;$ при $a<\dfrac{1}{5}$ уравнение не имеет решений.

§7. Решение систем уравнений. Решение задач, сводящихся к квадратным уравнениям

В этом параграфе рассмотрим системы, которые содержат уравнения второй степени.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x+3y=8,\\ xy=2.\end{cases}$$

В этой системе уравнение $2x+3y=8$ является уравнением первой степени, а уравнение $xy=2$ – второй. Решим эту систему методом подстановки. Из первого уравнения системы выразим x через y и подставим это выражение для x во второе уравнение системы:

$$x=\frac{8-3y}{2}=4-\frac{3}{2}y,\ \left(4-\frac{3}{2}y\right)y=2.$$

Последнее уравнение сводится к квадратному уравнению

$$8y-3y^2=4,\ 3y^2-8y+4=0.$$

Находим его корни:

$$y=\frac{4\pm\sqrt{4}}{3}=\frac{4\pm2}{3},\ y_1=2,\ y_2=\frac{2}{3}.$$

Из условия $x=4-\dfrac{3y}{2}$ получим $x_1=1,\ x_2=3.$

Ответ: $(1;2)$ и $\left(3;\dfrac{2}{3}\right).$

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2+y^2=41,\\ xy=20.\end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 2 и сложим с первым уравнением системы: $x^2+y^2+2xy=41+20\cdot2,\ (x+y)^2=81,$ откуда следует, что $x+y=9$ или $x+y=-9.$

Если $x+y=9$, то $x=9-y$. Подставим это выражение для x во второе уравнение системы:

$$(9-y)y=20,\ y^2-9y+20=0,$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm 1}{2},\ y_1=5,\ y_2=4,\ \ x_1=4,\ x_2=5.$$

Из условия $x+y=-9$ получим решения $(-4;-5)$ и $(-5;-4)$.

Ответ: $(\pm 4;\pm 5)$, $(\pm 5;\pm 4)$.

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ x-y=5.\end{cases}$$

Запишем второе уравнение системы в виде

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=5.$$

Используя уравнение $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$, получаем: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$.

Таким образом, получаем систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5.\end{cases}$$

Сложим эти уравнения, получим: $2\sqrt{x}=6,\ \sqrt{x}=3,\ x=9$.

Подставляя значение $x=9$ в первое уравнение системы, получаем $3-\sqrt{y}=1$, откуда следует, что $y=4$.

Ответ: $(9;4)$.

Пример 4. Решите систему уравнений: $\begin{cases}(x+y)(x+y-4)=-4,\\ \left(x^2+y^2\right)xy=-160.\end{cases}$

Введем новые переменные $x+y=u$ и $xy=v$; т. к. $x^2+y^2=x^2+y^2+2xy-2xy=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$, то данная система приводится к виду $\begin{cases}u(u-4)=-4,\\ \left(u^2-2v\right)v=-160.\end{cases}$

Решаем уравнение: $u(u-4)=-4,\ u^2-4u+4=0,\ (u-2)^2=0,\ u=2$.

Подставляем это значение для u в уравнение:

$$\left(u^2-2v\right)v=-160,\ (4-2v)v=-160,\ 2v^2-4v-160=0,$$

$$v^2 - 2v - 80 = 0,\ v = 1 \pm \sqrt{1+80} = 1 \pm 9,\ v_1 = 10,\ v_2 = -8.$$

Решаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 10 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -8. \end{cases}$$

Обе системы решаем методом подстановки. Для первой системы имеем:

$$x = 2 - y,\ (2 - y)y = 10,\ y^2 - 2y + 10 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение не имеет решений. Для второй системы имеем: $x = 2 - y,\ (2 - y)y = -8,\ y^2 - 2y - 8 = 0.$

$y = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3,\ y_1 = 4,\ y_2 = -2.$ Тогда $x_1 = -2$ и $x_2 = 4.$

Ответ: $(-2;4)$ и $(4;-2)$.

Пример 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy = 3, \\ y^2 + 3xy = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения умноженного на 2, вычтем второе уравнение, умноженное на 3, получим: $2x^2 - xy - 3y^2 = 0.$

Если $y = 0,$ тогда и $x = 0,$ но пара чисел $(0;0)$ не является решением исходной системы. Разделим в полученном уравнении обе части равенства на y^2, получим:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 3 = 0,\ \frac{x}{y} = \frac{1 \pm 5}{4},\ x = \frac{2}{3}y \text{ и } x = -y.$$

Подставляем значение $x = \frac{3y}{2}$ в первое уравнение системы:

$$\frac{9}{4}y^2 + 6y^2 = 3,\ 11y^2 = 4,\ y_1 = \frac{2}{\sqrt{11}},\ y_2 = -\frac{2}{\sqrt{11}},\ x_1 = \frac{3}{\sqrt{11}},\ x_2 = -\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Подставляем значение $x = -y$ в первое уравнение системы:

$$y^2 - 4y^2 = 3,\ -3y^2 = 3.$$

Решений нет.

Пример 9. Найти все значения параметра $a,$ при которых система уравнений

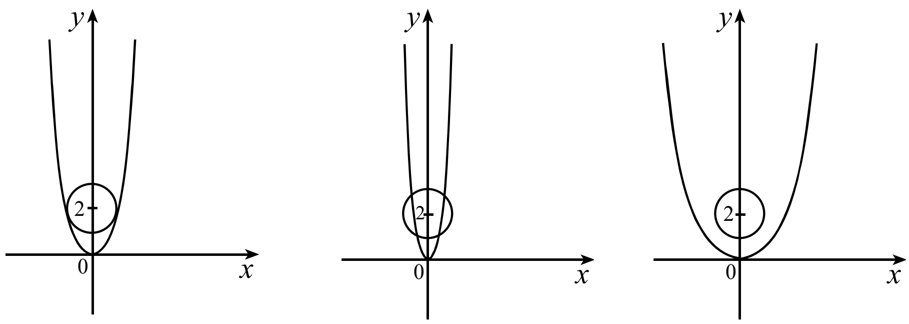
$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1, \\ y = ax^2. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Данная система называется системой с параметром. Их можно решить аналитическим методом, т. е. с помощью формул, а можно применить так называемый графический метод.

Заметим, что первое уравнение задает окружность с центром в точке $(0;2)$ с радиусом 1. Второе уравнение при $a \neq 0$ задает параболу с вершиной в начале координат.

Если $a = 0,$ то система не имеет решений. Если $a < 0,$ то ветви параболы направлены вниз, тогда парабола и окружность не имеют общих точек. Если $a > 0,$ то может оказаться, что парабола и окружность не пересекаются (см. рис. 1в), а если пересекаются, то может быть либо две точки пересечения (см. рис. 1а) либо четыре (см. рис. 1б).



а **б** **в**

Рис. 1

В случае а) парабола касается окружности. Из второго уравнения системы следует, что $x^2 = y/a,$ подставляем это значения для x^2 в первое уравнение:

$$\frac{y}{a} + (y-2)^2 = 1,\ \frac{y}{a} + y^2 - 4y + 4 = 1,\ y^2 - \left(4 - \frac{1}{a}\right)y + 3 = 0.$$

В случае касания в силу симметрии существует единственное значение y, поэтому дискриминант полученного уравнения должен быть равен 0. Так как ордината y точки касания положительная и т. к. $y = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{a}\right),$ то отсюда получаем, что $4 - \frac{1}{a} > 0;\ D = \left(4 - \frac{1}{a}\right)^2 - 12 = 0,$ отсюда из условия, что $4 - \frac{1}{a} > 0$ получаем: $4 - \frac{1}{a} = 2\sqrt{3},\ \frac{1}{a} = 4 - 2\sqrt{3},$

$$a=\frac{1}{4-2\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{16-12}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Если $a>\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, то парабола будет пересекать окружность в 4 точках.

Следовательно, система имеет хотя бы одно решение, если $a\ge\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Пример 10. Сумма квадратов цифр некоторого натурального двузначного числа на 9 больше удвоенного произведения этих цифр. После деления этого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 4 и в остатке 3. Найти это двузначное число.

Пусть двузначное число равно $10a+b$, где a и b – цифры этого числа. Тогда из первого условия задачи получаем: $a^2+b^2=9+2ab$, а из второго условия получаем: $10a+b=4(a+b)+3$.

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} a^2+b^2=9+2ab, \\ 6a-3b=3. \end{cases}$

Из второго уравнения системы получаем $6a-3b=3,\ 2a-b=1,$ $b=2a-1$. Подставляем это значение для b в первое уравнение системы:

$$a^2+(2a-1)^2=9+2a(2a-1),\ 5a^2-4a+1=9+4a^2-2a,$$

$$a^2-2a-8=0,\ D_1=1+8=9,\ a=1\pm 3,\ a_1=4,\ a_2=-2<0,\ b_1=7.$$

Ответ: 47.

Пример 11. После смешения двух растворов, один из которых содержал 48 г, а другой 20 г, безводного йодистого калия, получили 200 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго.

Обозначим через $x\%$ – концентрацию второго раствора, а через $(x+15)\%$ – концентрацию первого раствора.

48 г $(x+15)\%$	

I раствор

20 г $x\%$	

II раствор

В первом растворе 48 г составляет $(x+15)\%$ от веса всего раствора, поэтому вес раствора равен $\frac{48}{x+15}\cdot 100$. Во втором растворе 20 г составляет $x\%$ от веса всего раствора, поэтому вес второго раствора составляет

$\frac{20}{x}\cdot 100$. После смешения двух растворов получили 200 г нового раствора. Для определения x получаем уравнение:

$$\frac{48}{x+15}\cdot 100+\frac{20}{x}\cdot 100=200,\ \frac{24}{x+15}+\frac{10}{x}=1,$$

$$24x+10x+150=x^2+15x,\ x^2-19x-150=0,$$

$$D=19^2+600=361+600=961=31^2,\ x=\frac{19\pm 31}{2},\ x_1=25,\ x_2<0.$$

$$25+15=40.$$

Ответ: концентрация первого раствора 40%, концентрация второго раствора 25%.

Контрольные вопросы

1(1). Решите неполное квадратное уравнение:

а) $25x^2=0$; б) $16x^2-5=0$;

в) $3x^2-7x=0$; г) $\sqrt{3}x^2+\sqrt{11}=0$.

2(2). Решите квадратное уравнение:

а) $10x^2+3x-1=0$; б) $6x^2-5x-8=0$;

в) $9x^2-42x+49=0$; г) $2x^2-3x+9=0$.

3(2). Решите квадратное уравнение, используя формулу корней с D_1 (смотри формулу (8) в Задании):

а) $x^2-16x+60=0$; б) $x^2-6x+7=0$;

в) $9x^2+30x+25=0$. г) $3x^2+10x+9=0$.

4(2). Выясните, какие из ниже приведённых уравнений являются равносильными:

а) $x^2-4x-5=0$ и $(x-5)(x+1)=0$;

б) $30x^2+x-1=0$ и $6x-1=0$;

в) $9x^2-12x+4=0$ и $3x-2=0$;

г) $x^2+x+24=0$ и $7x^2-9x+20=0$.

5(1). Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{5}{2}$ и -2.

6(2). Решите уравнение:

а) $12x^4 - 35x^2 + 18 = 0;$ б) $5x^4 + 13x^2 - 6 = 0;$

в) $8x^4 + 14x^2 + 3 = 0;$ г) $x^6 - x^4 - 81x^2 + 81 = 0.$

7(3). Решите уравнение:

а) $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0;$ б) $2x^2 - (\sqrt{x})^2 - 3 = 0;$

в) $\sqrt{5x+1} = 3x - 5.$

8(4). Решите уравнение:

а) $x^2 - 4|x| + 3 = 0;$ б) $\dfrac{x^2 - 9x + 20}{x - 4} = 0;$

в) $|x^2 - 6x + 5| = 3;$ г) $|x^2 - 2x + 9| = |4x^2 - 3x + 7|.$

9(2). Сократите дробь $\dfrac{35 + x - 6x^2}{4x^2 - 12x + 5}.$

10(2). а) Найдите наименьшее значение квадратного трёхчлена $4x^2 - 10x + 3.$

б) Найдите наибольшее значение квадратного трёхчлена $2 + 5x - 3x^2$.

11(4). Решите уравнение при всех допустимых значениях параметра a:

а) $5ax + x = 10a^2 - 13a - 3;$ б) $(a+1)x^2 + 2(a+2)x + (a+5) = 0.$

12(2). Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x^2 - 2xy + y^2 = 5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 4, \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 2. \end{cases}$

Задачи

1(2). Не решая квадратное уравнение $x^2 - 2x - 5 = 0,$ найти значение выражения $x_1^3 + x_2^3,$ где x_1 и x_2 корни заданного уравнения.

2(8). Решите уравнение:

а) $(x^2 + 2x + 2)^2 - 3(x-1)(x+3) = 85;$

б) $9\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-24\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=18;$

в) $\dfrac{10x}{3x^2-4x+1}-\dfrac{15x}{3x^2+x+1}=2.$

г) $(x+3)^2-\dfrac{7}{x^2+6x}=15.$

3(4). Решите уравнение:

а) $\left|x^2+2x-5\right|=1-2x.$

б) $(x+1)\cdot|x-4|-(2x-1)\cdot|x-1|=3.$

4(3). Сумма квадратов цифр некоторого двузначного числа на 4 больше удвоенного произведения цифр данного числа. После деления этого числа на сумму цифр данного числа в частном получается 4 и в остатке 15. Найти данное число.

5(3). На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 страницы больше, чем вторая; у третьей на печатание страницы уходит на 4 минуты больше, чем у первой, и в $\dfrac{4}{3}$ раза больше, чем у второй. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?

6(4). К раствору, содержащему 39 г. соли добавили 1000 г. воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10 %. Найти первоначальную процентную концентрацию соли в растворе.

7(3). По графику поезд должен проходить перегон AB, равный $20\,\text{км}$, с постоянной скоростью. Но с заданной скоростью он прошёл полпути и остановился на 3 мин.; чтобы во время прийти в пункт B, ему пришлось остальные полпути идти на $10\,\text{км/ч}$ быстрее. Второй раз поезд простоял там уже 5 мин. С какой скоростью он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прибыть в пункт B по расписанию?

8(3). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=10,\\(x+y)(xy+1)=25.\end{cases}$$

9(4). Решите систему уравнений для всех допустимых значений параметра a:

$$\begin{cases} (2a+1)x+(a+1)y=3a-1, \\ (5a+1)x+(3a+1)y=2a+2. \end{cases}$$

10(3). При каком значении параметра a уравнение

$$\frac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{x^2-6x+5}=0$$

имеет единственное решение?

11(2). Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$.

12(5). Найти число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \ (a>0), \\ (y-x)^2=16. \end{cases}$$

