§7. Решение систем уравнений. Решение задач, сводящихся к квадратным уравнениям

В этом параграфе рассмотрим системы, которые содержат уравнения второй степени.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ xy=2. \end{cases}$$

В этой системе уравнение $2x+3y=8$ является уравнением первой степени, а уравнение $xy=2$ – второй. Решим эту систему методом подстановки. Из первого уравнения системы выразим x через y и подставим это выражение для x во второе уравнение системы:

$$x=\frac{8-3y}{2}=4-\frac{3}{2}y,\ \left(4-\frac{3}{2}y\right)y=2.$$

Последнее уравнение сводится к квадратному уравнению

$$8y-3y^2=4, 3y^2-8y+4=0.$$

Находим его корни:

$$y=\frac{4\pm\sqrt{4}}{3}=\frac{4\pm 2}{3},\ y_1=2,\ y_2=\frac{2}{3}.$$

Из условия $x=4-\dfrac{3y}{2}$ получим $x_1=1, x_2=3.$

Ответ: $(1;2)$ и $\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$.

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 2 и сложим с первым уравнением системы: $x^2+y^2+2xy=41+20\cdot 2,$ $(x+y)^2=81,$ откуда следует, что $x+y=9$ или $x+y=-9.$

Если $x+y=9,$ то $x=9-y.$ Подставим это выражение для x во второе уравнение системы:

$$(9-y)y=20,\ y^2-9y+20=0,$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm 1}{2},\ y_1=5,\ y_2=4,\ \ x_1=4,\ x_2=5.$$

Из условия $x+y=-9$ получим решения $(-4;-5)$ и $(-5;-4)$.

Ответ: $(\pm 4;\pm 5), (\pm 5;\pm 4)$.

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1, \\ x-y=5. \end{cases}$$

Запишем второе уравнение системы в виде

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=5.$$

Используя уравнение $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,$ получаем: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5.$

Таким образом, получаем систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения, получим: $2\sqrt{x}=6,\ \sqrt{x}=3,\ x=9.$

Подставляя значение $x=9$ в первое уравнение системы, получаем $3-\sqrt{y}=1,$ откуда следует, что $y=4.$

Ответ: $(9;4)$.

Пример 4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x+y)(x+y-4)=-4, \\ \left(x^2+y^2\right)xy=-160. \end{cases}$

Введем новые переменные $x+y=u$ и $xy=v$; т. к. $x^2+y^2=x^2+y^2+2xy-2xy=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$, то данная система приводится к виду $\begin{cases} u(u-4)=-4, \\ (u^2-2v)v=-160. \end{cases}$

Решаем уравнение: $u(u-4)=-4,\ u^2-4u+4=0,\ (u-2)^2=0,\ u=2.$
Подставляем это значение для u в уравнение:

$$(u^2-2v)v=-160, (4-2v)v=-160, 2v^2-4v-160=0,$$
$$v^2-2v-80=0, v=1\pm\sqrt{1+80}=1\pm9, v_1=10, v_2=-8.$$

Решаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=10 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=2, \\ xy=-8. \end{cases}$$

Обе системы решаем методом подстановки. Для первой системы имеем:

$$x=2-y, (2-y)y=10, y^2-2y+10=0.$$

Полученное квадратное уравнение не имеет решений. Для второй системы имеем: $x=2-y,\ (2-y)y=-8,\ y^2-2y-8=0.$

$y=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3,\ y_1=4,\ y_2=-2.$ Тогда $x_1=-2$ и $x_2=4.$

Ответ: $(-2;4)$ и $(4;-2)$.

Пример 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+4xy=3, \\ y^2+3xy=2. \end{cases}$$

Из первого уравнения умноженного на 2, вычтем второе уравнение, умноженное на 3, получим: $2x^2-xy-3y^2=0.$

Если $y=0,$ тогда и $x=0,$ но пара чисел $(0;0)$ не является решением исходной системы. Разделим в полученном уравнении обе части равенства на $y^2,$ получим:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-3=0, \frac{x}{y}=\frac{1\pm5}{4}, x=\frac{2}{3}y \text{ и } x=-y.$$

Подставляем значение $x = \dfrac{3y}{2}$ в первое уравнение системы: $\dfrac{9}{4}y^2 + 6y^2 = 3, 11y^2 = 4,\ y_1 = \dfrac{2}{\sqrt{11}},\ y_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{11}},\ x_1 = \dfrac{3}{\sqrt{11}},\ x_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{11}}.$

Подставляем значение $x = -y$ в первое уравнение системы:

$$y^2 - 4y^2 = 3, -3y^2 = 3.$$

Решений нет.

Пример 9. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1, \\ y = ax^2. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Данная система называется системой с параметром. Их можно решить аналитическим методом, т. е. с помощью формул, а можно применить так называемый графический метод.

Заметим, что первое уравнение задает окружность с центром в точке $(0;2)$ с радиусом 1. Второе уравнение при $a \neq 0$ задает параболу с вершиной в начале координат.

Если $a = 0$, то система не имеет решений. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз, тогда парабола и окружность не имеют общих точек. Если $a > 0$, то может оказаться, что парабола и окружность не пересекаются (см. рис. 1в), а если пересекаются, то может быть либо две точки пересечения (см. рис. 1а) либо четыре (см. рис. 1б).

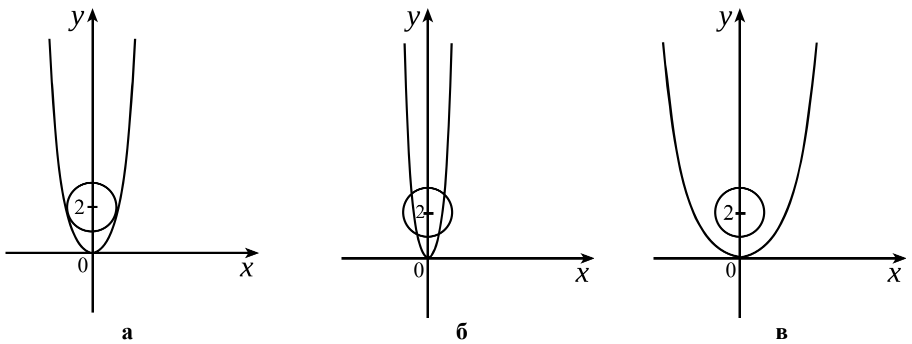

Рис. 1

В случае а) парабола касается окружности. Из второго уравнения системы следует, что $x^2 = y/a$, подставляем это значения для x^2 в первое уравнение:

$$\frac{y}{a}+(y-2)^2=1,\ \frac{y}{a}+y^2-4y+4=1,\ y^2-\left(4-\frac{1}{a}\right)y+3=0.$$

В случае касания в силу симметрии существует единственное значение y, поэтому дискриминант полученного уравнения должен быть равен 0. Так как ордината y точки касания положительная и т. к. $y=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{a}\right)$, то отсюда получаем, что $4-\frac{1}{a}>0$; $D=\left(4-\frac{1}{a}\right)^2-12=0$, отсюда из условия, что $4-\frac{1}{a}>0$ получаем: $4-\frac{1}{a}=2\sqrt{3},\ \frac{1}{a}=4-2\sqrt{3}$,

$$a=\frac{1}{4-2\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{16-12}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Если $a>\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, то парабола будет пересекать окружность в 4 точках.

Следовательно, система имеет хотя бы одно решение, если $a\geq\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Пример 10. Сумма квадратов цифр некоторого натурального двузначного числа на 9 больше удвоенного произведения этих цифр. После деления этого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 4 и в остатке 3. Найти это двузначное число.

Пусть двузначное число равно $10a+b$, где a и b – цифры этого числа. Тогда из первого условия задачи получаем: $a^2+b^2=9+2ab$, а из второго условия получаем: $10a+b=4(a+b)+3$.

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} a^2+b^2=9+2ab, \\ 6a-3b=3. \end{cases}$

Из второго уравнения системы получаем $6a-3b=3,\ 2a-b=1,$ $b=2a-1$. Подставляем это значение для b в первое уравнение системы:

$$a^2+(2a-1)^2=9+2a(2a-1),\ 5a^2-4a+1=9+4a^2-2a,$$

$$a^2-2a-8=0,\ D_1=1+8=9,\ a=1\pm3,\ a_1=4,\ a_2=-2<0,\ b_1=7.$$

Ответ: 47.

Пример 11. После смешения двух растворов, один из которых содержал 48 г, а другой 20 г, безводного йодистого калия, получили 200 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго.

Обозначим через $x\%$ – концентрацию второго раствора, а через $(x+15)\%$ – концентрацию первого раствора.

48 г $(x+15)\%$	

I раствор

20 г $x\%$	

II раствор

В первом растворе 48 г составляет $(x+15)\%$ от веса всего раствора, поэтому вес раствора равен $\frac{48}{x+15}\cdot 100.$ Во втором растворе 20 г составляет $x\%$ от веса всего раствора, поэтому вес второго раствора составляет $\frac{20}{x}\cdot 100.$ После смешения двух растворов получили 200 г нового раствора. Для определения x получаем уравнение:

$$\frac{48}{x+15}\cdot 100+\frac{20}{x}\cdot 100=200,\ \frac{24}{x+15}+\frac{10}{x}=1,$$

$$24x+10x+150=x^2+15x,\ x^2-19x-150=0,$$

$$D=19^2+600=361+600=961=31^2,\ x=\frac{19\pm 31}{2},\ x_1=25,\ x_2<0.$$

$$25+15=40.$$

Ответ: концентрация первого раствора 40%, концентрация второго раствора 25%.