§4. Теорема Виета. Приведенное квадратное уравнение

Найдем сумму и произведение корней квадратного уравнения (3). Из формулы (5) получаем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b+\sqrt{D}\right)\left(-b-\sqrt{D}\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Откуда следует утверждение, которое *называют теоремой Виета:* если корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют, то сумма корней квадратного уравнения равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$.

Например, для квадратного уравнения $2x^2 - 3x - 5 = 0$ корни существуют, т. к. $D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 > 0.$ По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна $\frac{3}{2}$, а произведение корней равно $-\frac{5}{2}$.

Пример 1. Не решая квадратное уравнение, найдите сумму квадратов корней квадратного равнения $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0, b^2 - 4ac > 0.$

Из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Преобразуем выражение $x_1^2 + x_2^2$.

Имеем: $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$

Отсюда следует, что $x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ называется *приведенным квадратным уравнением.* В этом уравнении коэффициент при x^2 равен 1. Формула корней для приведенного квадратного уравнения принимает такой вид:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ или } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения звучит так: если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0,$ то справедливы формулы $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q.$

Обратная теорема Виета: если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p,$ а $x_1 \cdot x_2 = q,$ то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0.$

Для доказательства подставим в уравнение $x^2 + px + q = 0$ вместо p выражение $-(x_1 + x_2),$ а вместо q выражение $x_1x_2,$ тогда получаем $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = (x - x_1)(x - x_2),$ откуда следует, что числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0.$

Пример 2. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{7}$.

Из обратной теоремы Виета следует, что данные числа являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=0,$ т. е. уравнения $x^2-\frac{13}{14}x+\frac{3}{14}=0.$

Заметим, что данные числа являются и корнями квадратного уравнения $14x^2-13x+3=0,$ которое получается из предыдущего умножением обеих частей уравнения на 14.

Пример 3. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2+6x+q=0$ удовлетворяют условию $x_2=2x_1$. Найдите q, x_1, x_2.

Из теоремы Виета следует, что $x_1+x_2=3x_1=-6,$ т. е. $x_1=-2$ и $x_2=2x_1=-4.$ Тогда $q=x_1x_2=8.$

Пример 4. Не решая уравнение $2x^2-3x-9=0,$ найдите $\frac{x_2}{1+x_1}+\frac{x_1}{1+x_2},$ где x_1 и x_2 – его корни.

Преобразуем выражение:

$$\frac{x_2}{1+x_1}+\frac{x_1}{1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)+x_2^2+x_1^2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{(x_2+x_1)+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}.$$

По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{3}{2}$ и $x_1x_2=-\frac{9}{2}.$ Поэтому имеем:

$$\frac{\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{9}{2}\right)}{1+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+9}{-2}=-\frac{51}{8}.$$

Пример 5. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+13x-17=0.$ Составьте квадратное уравнение, корнями которого являлись бы числа $2-x_1$ и $2-x_2$.

По теореме Виета $x_1+x_2=-13$ и $x_1x_2=-17.$ Сумма чисел $2-x_1$ и $2-x_2$ равна $4-(x_1+x_2)=4+13=17,$ а произведение этих чисел равно $(2-x_1)(2-x_2)=4-2(x_1+x_2)+x_1x_2=4-2(-13)-17=13.$ Используя обратную теорему Виета, получим квадратное уравнение $x^2-17x+13=0,$ корнями которого являются заданные числа.

Заканчивая этот параграф, хочется сказать, что знаменитый французский математик Франсуа Виет родился в 1540 году в небольшом городке Фантане-ле-Конт на юге Франции. Свою знаменитую теорему, которую мы знаем под названием теоремы Виета, он доказал в 1591 году, сейчас эта теорема входит в школьные программы. Люди пользуются этой теоремой уже пятое столетие. Франсуа Виет обладал огромной трудоспособностью, он мог работать по трое суток без отдыха, многие его результаты и открытия достойны восхищения.

