В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2, ... *n*, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§ 1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Комплексные числа. Комплексными числами называют выражения вида $a+ib$, где a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ, для которых следующим образом вводятся понятия равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a+ib$ и $c+id$ *равны* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$;

б) *суммой* чисел $a+ib$ и $c+id$ называется число

$$a+c+i(b+d);$$

в) *произведением* чисел $a+ib$ и $c+id$ называется число

$$ac-bd+i(ad+bc).$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d), \qquad (1)$$

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc). \qquad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z=a+ib$ означает, что комплексное число $a+ib$ обозначено буквой z.

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z=a+ib$ и обозначается Re z; пишут Re $z=a$ или $\mathrm{Re}(a+ib)=a$. Число b называется мнимой частью числа $z=a+ib$ и обозначается Im z, пишут Im $z=b$ или $\mathrm{Im}\,(a+ib)=b$. Символ i называется мнимой единицей.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a+i0$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем: $(a+i0)+(c++i0)=a+c+i0$,

$$(a+i0)(c+i0)=(ac)+i0.$$

Таким образом, отождествив число $a+i0$ с действительным числом a, получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно $a=a+i0$. В частности, число $0=0+i0$ будем, как обычно, называть нулем, а число $1=1+i0$ – единицей.

Числа $0+ib$ называют чисто мнимыми и обозначают ib: $0+i7=7i$, $0-i2=-2i$.

На основании формулы (2) найдем значение выражения $i^2=ii$:

$$i^2=ii=(0+i1)(0+i1)=-1+i0=-1.$$

Таким образом,

$$i^2=-1. \tag{3}$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a+ib$ и $c+id$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=8+3i$ и $z_2=-5+2i$. По формуле (1) находим

$$z_1+z_2=8-5+i(3+2)=3+5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8+3i)$ и $(-5+2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1z_2=(8+3i)(-5+2i)=-40-15i+16i+6i^2=-40+i-6=-46+i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*: $z_1+z_2=z_2+z_1$, для любых комплексных чисел z_1, z_2.

2. *Ассоциативность сложения*: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

3. $z+0=z$ для любого комплексного числа z.

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разность* чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2-z_1.

5. *Коммутативность умножения*: $z_1z_2=z_2z_1$, для любых комплексных чисел z_1, z_2.

6. *Ассоциативность умножения*: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$, для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

7. *Дистрибутивный закон* $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$,
для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

8. $1\cdot z=z$ для любого комплексного числа z.

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2\neq 0$, существует число z такое, что $z_2z=z_1$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения операций сложения и умножения (см. формулы (1) и (2)) и равенства комплексных чисел. Докажем свойство 9; остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z_1=a+ib$, $z_2=c+id$, $z_2\neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z=x+iy$. Тогда равенство $zz_2=z_1$ запишется так: $a+ib=(x+iy)(c+id)=xc-yd+i(xd+yc)$.

Отсюда имеем, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений: $\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases}$

Эта система имеет единственное решение

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \tag{4}$$

Пример 2. Найти разность z_1-z_2 и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1=2-7i \text{ и } z_2=-1+3i.$$

Находим разность

$$z_1-z_2=(2-7i)-(-1+3i)=(2-(-1))+i(-7-3)=3-10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2(-1)+(-7)3}{1+9}+i\frac{-7(-1)-2\cdot 3}{1+9}=\frac{-23}{10}+\frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла.
Невозможно расширить понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, если мы при этом хотим сохранить все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, что при умножении обеих частей неравенства на положительное число оно остается верным и т. п.).
Попробуем сравнить числа i и 0.
Предположим, что $i>0$. Тогда умножая обе части неравенства на i (по предположению $i>0$, поэтому знак неравенства не меняем), получаем $i^2>0$, т.е. $-1>0$, что неверно. Предположим, что $i>0$. Тогда, умножив обе части неравенства на i, снова получим, что $i^2>0$.
Таким образом, сравнить числа i и 0 невозможно.

