§ 3. Сочетания

Определение. Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \le n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через C_n^k.

Символ C_n^k читается: «це из n по k» или «число сочетаний из n по k». С – первая буква французского слова Combinaison – «сочетание».

Выведем формулу для нахождения C_n^k. Из любого набора, содержащего k элементов, можно с помощью перестановок получить k! Упорядоченных выборок объема k, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Отметим, что формула (4) справедлива при $k = 0$, т.к. мы условились считать, что 0!=1. Выпишем несколько частных случаев формулы (4):

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Пример 11. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, защитников – $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способом, нападающих – $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ способами. Всего, по правилу произведения, существует $2 \cdot 21 \cdot 120 = 5040$ способов выбора стартовой шестерки.

Ответ: 5040.

Пример12. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых и число треугольников, образованных этими прямыми.

Число точек пересечения прямых равно числу способов выбора неупорядоченной пары прямых, т.е. C_n^2. Аналогично, каждый треуголь-

© 2007, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Коновалов Сергей Петрович.

ник определяется тройкой прямых, поэтому общее число треугольников равно C_n^3.

Ответ: C_n^2 и C_n^3.

Пример 13. Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

Задачи для первого варианта можно выбрать C_{28}^7 способами. После этого останется 21 задача, так что второй вариант можно составить C_{21}^7 способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать C_{14}^7 способами, а для четвертого – $C_7^7 = 1$ способом.

По правилу произведения получаем число $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7$. Но так как варианты равноправны, то полученное число надо разделить на 4!

Ответ: $\frac{1}{4!} C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7 = \frac{28!}{4!(7!)^4}$.

Отметим, что полученное число имеет порядок 10^{13}; число n! С ростом n растет очень быстро: например, если 10! = 3 628 800, то 20! = 2 432 902 008 176 640 000.

С точки зрения теории множеств C_n^k – это число всех подмножеств из k элементов, которые можно выбрать из множества, состоящего из n элементов. Поэтому равенство $C_n^0 = 1$ означает, что всякое пустое подмножество только одно; $C_n^1 = n$ – что число одноэлементных подмножеств равно n и т.д.

Этот взгляд на числа C_n^k позволяет найти комбинаторный смысл следующих арифметических свойств чисел C_n^k:

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$, если $0 \le k \le n$;

2°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \le k \le n+1$;

3°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Свойство 1° сразу получается из формулы (4):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k,$$

но ясен и его комбинаторный смысл. Выбрав множество из k элементов, мы одновременно получаем подмножество из (n - k) элементов. Например, если из n учеников класса выбирают k человек для поездки на олимпиаду в Москву, то однозначно определяются ($n - k$) таких, которые в Москву не поедут, и наоборот.

Свойство $2°$ также легко доказывается, если воспользоваться формулой (4):

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Комбинаторный смысл свойства $2°$ выясняется с помощью правила суммы. Предположим, что в классе из n учеников появился новый ученик, и на олимпиаду в Москву решили отправить команду из k + 1 человек. Все такие команды можно разделить на две группы: те команды, в которые входит новичок, и те, в которые он не входит. Число команд в первой группе равно C_n^k – надо дополнить команду k учениками, выбрав их из n оставшихся, а во второй группе число команд равно C_n^{k+1}. Следовательно, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Свойство $2°$ позволяет последовательно находить числа C_n^k. В самом деле,

$$C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

$$C_2^0 = C_2^2 = 1, \quad C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 2,$$

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 3, \quad C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 3,$$

$$C_4^0 = C_4^4 = 1, C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 4, C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 6, C_4^3 = C_3^2 + C_3^3 = 4$$

и т.д. Если принять соглашение, что $C_0^0 = 1$, то все числа C_n^k можно расположить на плоскости в виде бесконечной таблицы, которая называется треугольником Паскаля:

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \qquad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \qquad C_2^1 = 2 \qquad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \qquad C_3^1 = 3 \qquad C_3^2 = 3 \qquad C_3^3 = 1$$

$$\ldots$$

В этой таблице в строке с номером n (n = 1, 2, ...) каждое число (кроме двух крайних) равно сумме двух «соседних» с ним чисел строки с номером n - 1.

Приведем аналитическое доказательство свойства $3°$, основанное на свойствах треугольника Паскаля. Положим

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Так как каждое число строки с номером n входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки, то $S_{n+1} = 2S_n$. Следовательно, $S_{n+1} = 2S_n = 2^2 S_{n-1} = \cdots = 2^{n+1} S_0 = 2^{n+1}$, т.к. $S_0 = 1$.

Другое – комбинаторное – доказательство свойства $3°$ фактически было получено в примере 8. Там было найдено, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. С другой стороны, как мы уже отмечали, C_n^k – это число всех подмножеств, состоящих из k элементов, поэтому число всех подмножеств равно (правило суммы)

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Следовательно, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.