

§10. Неравенства для логарифмов с переменным основанием

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > 0$, где $a(x), f(x)$ непрерывны на промежутке X .

ОДЗ: $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0$. Оказывается, что и в этом случае

| | |
|---|---------|
| знак функции $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - 1)$ в ОДЗ | (УР Л9) |
|---|---------|

и имеет место условие равносильности

| | |
|--|----------|
| $\log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow (a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0 (< 0)$ в ОДЗ. | (УР Л10) |
|--|----------|

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0 (< 0). \end{cases} \quad (\text{УР Л10*})$$

Для нестрогого неравенства это условие выглядит по-другому.

$$\log_{a(x)} f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1) \geq 0 (\leq 0). \end{cases} \quad (\text{УР Л11})$$

Действительно, по определению, $\log_{a(x)} f(x) = \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$,

$$a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0.$$

В силу предыдущего условия равносильности (УР Л5), знаки $\lg f(x), \lg a(x)$ совпадают со знаками разностей $f(x)-1$ и $a(x)-1$

соответственно. Поэтому знак $\frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$ совпадает со знаком частного

$$\frac{f(x)-1}{a(x)-1}, \text{ или со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-1).$$

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$, где $a(x), f(x), g(x)$ непрерывные функции и $a(x) > 0, a(x) \neq 1$.

По определению, $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) = \frac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)}$, и, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$\begin{array}{l} \text{знак разности } \log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \text{ совпадает} \\ \text{со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ.} \end{array} \quad (\text{УР Л12})$$

Из полученного условия равносильности следует, что

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{в} \\ \text{ОДЗ.} \end{matrix}} \quad (\text{УР Л13})$$

Заметим, что из (УР Л12) автоматически следует, что $a(x) \neq 1$, поэтому при решении *строгих неравенств* условие $a(x) \neq 1$ в ОДЗ можно *опустить* и так записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) < 0. \end{cases}} \quad (\text{УРЛ 13*})$$

Преимущество и красота приведенных условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований. Теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

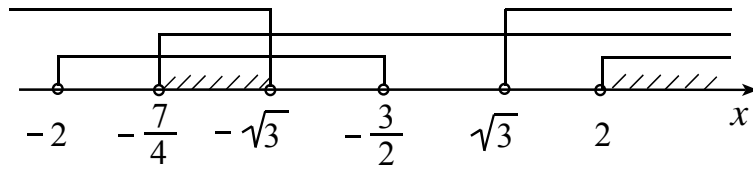
Заметим, что все условия равносильности *формально* точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Пример 22. (МФТИ, 1980) Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.

♦ В силу (УР Л10), $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}, \\ x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty), \\ (x^2-3-1)(4x+7-1) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty).$$



Ответ: $\left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty)$. ♦

Но, как показывает практика, не всегда этим удобно пользоваться полными условиями равносильности. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы часто и будем делать.

Пример 23. (МФТИ, 1994). Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right) \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

♦ ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{1}{3}-x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ 2x+\frac{1}{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{6}. \\ 2x+\frac{1}{3} \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pm 3-1}{6} \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} & \log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) > \log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) > \log_2\left(\frac{1}{3}-x\right) - \frac{2}{3}\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}^2\left(\frac{1}{3}-x\right) - 3\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) + 2\right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \text{(т. к. } t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)\text{)} \\ & \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - 1\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - 2\right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right) - \right. \\ & \left. - \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2\right) > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

В ОДЗ, в силу (УР Л12),

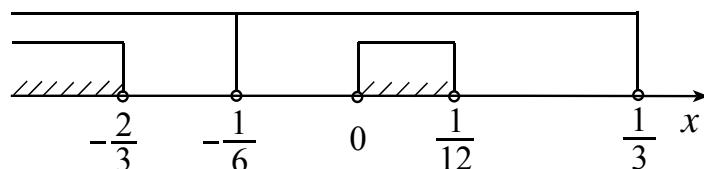
$$\begin{aligned} & \left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)^3\left(\frac{1}{3}-x-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\frac{1}{3}-x-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \text{(т. к. в ОДЗ } \frac{1}{3}-x > 0\text{)} \\ & \Leftrightarrow \left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)\left(\frac{1}{3}-x-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)(36x^2+21x-2) < 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{1}{3} - 1\right) \left(2x + \frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{3} - x - 2x - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - x + 2x + \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{12}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right)^3 \left(x - \frac{1}{12}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учтем ОДЗ



и получаем

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$. ♦

Пример 24. (МФТИ, 1996). Решите неравенство

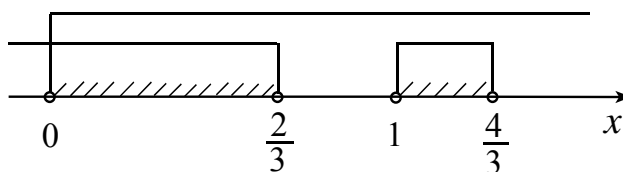
$$\log_{|3x-3|} (25^x - 9^x) < \log_{|3x-3|} (5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|} (5^{x-1} + 3^{x-1}).$$

♦ $\log_{|3x-3|} (5^x + 3^x)(5^x - 3^x) < \log_{|3x-3|} (5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|} (5^{x-1} + 3^{x-1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-3| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, \\ 5^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(|3x-3|-1\right) \left(5^x - 3^x - 5^{x-1} - 3^{x-1}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(|3x-3|-1\right) \left(\frac{4}{5}5^x - \frac{4}{3}3^x\right) < 0.$$

В силу (УР М5) и (УР П6),



$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow (3x-4)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^0\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) < 0$$

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right)$.