

§8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$, где $a(x), f(x), g(x)$ – непрерывные функции. ОДЗ: $a(x) > 0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число e (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид $e^{f(x)\ln a(x)} > e^{g(x)\ln a(x)}$. Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$$(e-1)(f(x)\ln a(x) - g(x)\ln a(x)) = (e-1)(f(x) - g(x))\ln a(x) > 0,$$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство $(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ. (УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \text{ (УР П5*)}$$

Поэтому

$$\boxed{\text{знак разности } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ.}} \text{ (УР П6)}$$

Преимущество (УР П6) состоит в том, что, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за **ОДИН ШАГ** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

Пример 18. Решите неравенство

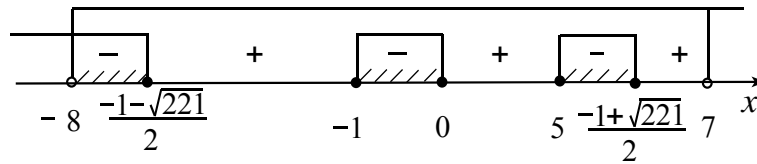
$$(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x}.$$

♦ ОДЗ: $56 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 56 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8; 7)$.

В ОДЗ, в силу (УР П6), $(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (56 - x - x^2)(x^3 - 2x^2 - 2x^2 - 5x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right) x(x+5)(x-1) \leq 0 \Rightarrow$$



Ответ: $\left[-8; \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right] \cup [-1; 0] \cup \left[5; \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right]$. ♦